

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Демченко Юрий Анатольевич

**Моды шепчущей галереи в неидеальных оптических
микрорезонаторах. Методы аппроксимации**

01.04.01 приборы и методы экспериментальной физики

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, профессор Городецкий М.Л

Москва 2017 г.

Оглавление

1	Введение	6
1.1	Введение	6
1.2	Актуальность темы	7
1.3	Цели диссертационной работы	8
1.4	Задачи	8
1.5	Научная новизна	8
1.6	Практическая ценность результатов	9
1.7	Методология и методы исследования	9
1.8	Основные положения, выносимые на защиту	9
1.9	Достоверность результатов	10
1.10	Личный вклад автора	10
1.11	Публикации и апробация работы	10
1.12	Структура и объем диссертации	11
2	Собственные частоты резонаторов с МШГ	12
2.1	Обзор литературы	12
2.2	Микрорезонатор и системы координат	15
2.2.1	Цилиндрическая система координат	16
2.2.2	Сферическая система координат	17
2.2.3	Сфероидальная система координат	19
2.2.4	Тороидальная система координат	20
2.3	Расчет собственных частот резонаторов с МШГ	21
2.3.1	Собственные частоты диэлектрической сферы	21
2.3.2	Разложение для случая цилиндра	23
2.3.3	Приближенные методы	24
2.3.3.1	Метод ВКБ для тел вращения	24

2.3.3.2	Метод Эйконала и квантование Энгштейна-Бриллюэна-Келлера (ЕБК)	26
2.3.3.3	ЕБК для сфероида	30
2.3.3.4	ЕБК для квартики	31
2.3.3.5	ЕБК для тороида	32
2.3.4	Распределение поля в сфероидальных резонаторах	35
2.3.5	Численные проверки	37
2.3.6	Интерполяция ошибок	38
2.4	Заключение	42
3	Применение оптических микрорезонаторов с МШГ в качестве высокочувствительных сенсоров	43
3.1	Обзор литературы	43
3.1.1	Сенсоры на эффекте поверхностного плазмонного резонанса	45
3.1.2	Сенсоры на интерферометрах	46
3.1.2.1	Интерферометр Маха-Цандера	46
3.1.2.2	Интерферометр Юнга	46
3.1.2.3	Интерферометр Хартмана	46
3.1.2.4	Обратное рассеяние	47
3.1.3	Сенсоры на оптических волноводах	47
3.1.3.1	Резонансное зеркало	47
3.1.4	Сенсоры на основе оптоволокна	48
3.1.4.1	Брэгговские решетки в волокне	48
3.1.4.2	Нановолокно	49
3.1.5	Фотонный кристалл	49
3.1.6	Сенсоры на микрорезонаторах с модами шепчущей галереи	49
3.1.6.1	Отражение на границе раздела	49
3.1.6.2	Основные типы детекторов	50
3.1.6.3	Методы улучшения чувствительности	51
3.1.6.4	Покрытия поверхности	52
3.1.6.5	Шумы в резонаторах	53
3.1.6.6	Методы, подавляющие некоторые виды шумов	54
3.1.6.7	Флюоресцентные сферы	54
3.1.7	Использование	55
3.2	Расчет поправок для тонкого слоя	56
3.2.1	Характеристическое уравнение	56

3.2.1.1	Диэлектрическая сфера	56
3.2.1.2	Поправки тонкого слоя	56
3.2.2	Расчет через тензор Максвелла	60
3.3	Заключение	62
4	Связь РШГ с призмой	64
4.1	Обзор литературы	64
4.1.1	Взаимодействие со свободным пучком	64
4.1.2	Условие фазового синхронизма	65
4.1.3	Связь с помощью волокон	65
4.1.4	Связь в дифракционными решетками	67
4.1.5	Другие способы связи	67
4.1.6	Призма	68
4.2	Связь с несферическим резонатором с помощью призмы	68
4.2.1	Распределение поля снаружи резонатора	68
4.2.2	Оптимизация величины связи	72
4.2.3	Добротность нагружения	73
4.2.4	Сдвиг собственных частот	78
4.2.5	Влияние потерь в призме	78
4.3	Заключение	79
5	Стабилизация лазеров с помощью микрорезонаторов с МШГ	80
5.1	Обзор литературы	80
5.1.1	Полупроводниковые лазеры	80
5.1.2	Пассивная стабилизация	81
5.1.2.1	Стабилизация полупроводниковых лазеров внешним зеркалом	81
5.1.3	Активная стабилизация	82
5.1.3.1	Метод Паунда-Драйвера-Холла	82
5.1.3.2	Метод Хэнша-Куйо	83
5.1.4	Стабилизация лазера микрорезонатором с МШГ	84
5.2	Расчет параметров стабилизации	85
5.2.1	Обратное рассеяние и отражение от резонатора с МШГ	85
5.2.2	Полная система уравнений для стабилизации	85
5.2.3	Отражение от резонатора	86
5.2.4	Уравнение медленно меняющейся амплитуды для лазера	87
5.2.5	Выбор безразмерных переменных	88
5.2.6	Стабильность	91

5.2.7	Полоса затягивания	91
5.2.8	Устойчивость	94
5.3	Заключение	95
6	Основные результаты работы	98

Глава 1

Введение

1.1 Введение

В настоящее время фотоника активно развивается и в скором времени способна будет вытеснить традиционные методы обработки информации. Основой для фотоники является оптическая обработка информации, для которой необходимы различные устройства: стабильные оптические генераторы, модуляторы, фильтры и линии задержки [1]. Фотонные устройства часто включают в себя и оптические резонаторы, среди которых по своим свойствам отдельное место занимают оптические резонаторы с МШГ, обладающие высокой добротностью (до 10^{11} [2]), устойчивостью к внешним воздействиям и простотой изготовления.

Высокая добротность резонаторов с МШГ дает возможность использовать их в качестве высокочувствительных детекторов, способных конкурировать с аналогичными устройствами на других схемах детектирования. В настоящее время с помощью микрорезонаторов с МШГ создаются биодетекторы, способные детектировать единичные молекулы.

Однако, высокая добротность микрорезонаторов с МШГ не позволяет им эффективно возбуждаться свободным пучком. Для связи с резонаторами используются различные оптические элементы связи. Оптимизация процесса связи является неотъемлемой частью улучшения характеристик приборов на основе резонаторов с МШГ.

В то же время высокая добротность позволяет концентрировать большие оптические мощности в малых объемах, что приводит к появлению нелинейных процессов в резонаторах. Благодаря этому в резонаторе с МШГ возможно создание оптических гребенок, генерирующих излучение, состоящее из эквидистантного набора спектральных линий. Оптические гребенки могут быть использованы для задач спектроскопии и телекоммуникации.

Высокая добротность резонаторов с МШГ позволяет использовать их в схемах как с пассивной, так и с активной стабилизацией. Неидеальности материала резонатора также

обеспечивают обратное рассеяние излучения в лазер, что может обеспечить затягивание частоты лазера, значительно сужающее ширину линии лазера. Этот эффект позволяет создать компактные стабилизированные резонатором с МШГ источники излучения, обладающие хорошими спектральными характеристиками.

Следовательно, при проектировании приборов на основе резонаторов с МШГ, важной задачей является исследование структуры мод, их добротности и зависимости этих величин от различных параметров, включая форму микрорезонатора, а также оптимизация их связи с оптическим излучением.

1.2 Актуальность темы

Для современных задач коммуникации и спектроскопии важную роль играют оптические гребенки. Резонаторы МШГ с керровской нелинейностью могут служить генераторами оптических гребенок, причем их размер на несколько порядков меньше традиционных систем на фемтосекундных лазерах. При подаче оптических импульсов гребенки на детектор также возможно создание стабильного генератора СВЧ сигнала, также востребованного для практических задач.

Задача детектирования химических веществ в жидкостях и газах является очень важной в различных областях. Высокая добротность резонаторов с МШГ позволяет использовать их наравне с детекторами других типов в качестве детекторов, что требует аналитических оценок чувствительности собственных частот к изменению внешних параметров.

Высокая добротность резонаторов позволяет использовать их для стабилизации лазерного излучения. Среди различных активных и пассивных схем стабилизации схема с затягиванием частоты лазера на резонатор, основанная на обратном рассеянии в материале резонатора, отличается простотой и эффективностью.

На практике для эффективного использования резонаторов с МШГ необходима оптимизация их формы и величины связи. При этом в экспериментах часто требуется использовать не только сферические резонаторы, которые значительно проще в изготовлении по сравнению, например, с цилиндрическими, но и резонаторов других форм. Если для сферических резонаторов собственные частоты легко получить и численно и аналитически, то для остальных форм необходимы специальные методы.

Варьирование формы резонатора позволяет не только изменять собственные частоты мод, но также и дисперсии разных порядков, что играет важную роль при процессе генерации оптических гребенок [3].

Связь с резонатором с МШГ не является тривиальной задачей и требует дополнительных оптических элементов. Для большинства экспериментальных задач требуется максимизиро-

вать величину связи, что может быть, в том числе, сделано с помощью варьирования формы резонатора.

1.3 Цели диссертационной работы

1. Разработка теоретических методов анализа мод шепчущей галереи в несферических микрорезонаторах
2. Теоретическое исследование влияния адсорбированного поверхностного слоя на моды шепчущей галереи
3. Разработка методов оптимального возбуждения оптических микрорезонаторов
4. Теоретическое исследование стабилизации лазера высокочастотным резонатором с модами шепчущей галереи

1.4 Задачи

1. Проанализировать и применить методы расчета собственных частот мод шепчущей галереи для осесимметричных изотропных резонаторов с различными боковыми профилями для увеличения точности существующих приближений
2. Рассчитать и верифицировать поправки для собственных частот тонкого диэлектрического слоя на поверхности изотропного сферического диэлектрического резонатора
3. Получить оптимальные параметры для связи изотропных сфероидальных резонаторов с призмой
4. Проанализировать возможность построения упрощенной аналитической модели стабилизации лазера высокочастотным резонатором с модами шепчущей галереи, обеспечивающую затягивание частоты лазера и возможность аналитического получения основных параметров

1.5 Научная новизна

Построены наиболее точные приближения для собственных частот сфероидов и тороидов. Впервые получены аналитические приближения дисперсии второго порядка для поперечных мод. Получено распределение поля для сфероидальных резонаторов.

Впервые применены два различных метода для поиска сдвигов собственных частот сферических микрорезонаторов при наличии тонкого диэлектрического слоя на их поверхности. Так же впервые проанализировано влияние поглощения в тонком слое на добротность мод.

Впервые проведена оптимизация связи сфероидальных микрорезонаторов с призмой. Получены выражения для оптимальных углов падения возбуждающего излучения в призме, добротности связи, оптимальной сплюснутости и сдвигов собственных частот резонатора при наличии призмы.

Исследована модель стабилизации лазера резонатором с МШГ, показано, что в ней возможна стабилизация и затягивание. Впервые получены аналитические выражения для стабильности частоты лазера и оценки ширины полосы затягивания.

1.6 Практическая ценность результатов

Полученные результаты могут использоваться для выбора оптимальных параметров для экспериментов с резонаторами с модами шепчущей галереи, а также дают возможность численно оценить эффекты, связанные с резонаторами.

1.7 Методология и методы исследования

В основе аналитических расчетов лежат методы теории возмущения, квазиклассические приближения эйконала и квантование Эйнштейна-Бриллюэна-Келлера в сопоставлении с численным моделированием краевой электродинамической задачи методом конечных элементов.

1.8 Основные положения, выносимые на защиту

1. Асимптотические ряды для расчета собственных частот и дисперсии групповой скорости, и выражения для распределения поля в осесимметричных диэлектрических резонаторах с модами шепчущей галереи, полученные в диссертационной работе, обеспечивают существенное (до порядка величины в практически важных случаях) улучшение точности по сравнению с предыдущими аналитическими результатами.
2. Аналитические приближения для изменения собственной частоты и добротности сферических диэлектрических изотропных резонаторов с модами шепчущей галереи при наличии тонкого изотропного поверхностного слоя, полученные двумя различными методами и верифицированные численным моделированием, устраняют имеющуюся в других работах неоднозначность.

3. Аналитическая теория связи призмного элемента со сфероидальными резонаторами с модами шепчущей галереи, разработанная в диссертационной работе, позволила рассчитать зависимости угловых спектров излучения от формы резонатора и оптимизировать геометрию резонатора для улучшения связи с осесимметричными гауссовыми пучками и получить зависимость нагруженной добротности и сдвига собственных частот резонатора от формы резонатора при наличии призмы возбуждения.
4. Упрощенная модель стабилизации частоты диодного лазера резонатором с модами шепчущей галереи при наличии в нем обратного рэлеевского рассеяния, учитывающая затягивание частоты полупроводникового лазера модой микрорезонатора, позволяет получить аналитические приближения для величины стабилизации частоты лазера и ширины полосы затягивания, согласующиеся с численным моделированием.

1.9 Достоверность результатов

Достоверность результатов подтверждалась тщательным сравнением полученных аналитических приближений с численными расчетами. Все полученные приближения имеют непротиворечивый физический смысл и согласуются с ранее полученными результатами. Результаты оптимизации связи с призмой для сфероидальных резонаторов были использованы в экспериментах, проводимых в Российском Квантовом Центре.

1.10 Личный вклад автора

Все представленные в работе результаты получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. Автором выполнены все численные и аналитические расчеты, обработаны и проанализированы полученные результаты. Также им проведено тщательное сравнение полученных аналитических приближений с результатами численных расчетов.

1.11 Публикации и апробация работы

Результаты исследования опубликованы в 4-х статьях в журналах, которые индексируются в базе данных Scopus и Web of Science, а также представлены на конференциях: Photonics West 2012 - Laser Resonators, Microresonators, and Beam Control XIV, San Francisco, CA, USA, 2012; ICONO/ LAT 2013, 2013; ЛОМОНОСОВ 2015. , Москва, Россия, 13-17 апреля 2015; Ломоносов 2017, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 10-14 апреля 2017; XVI Всероссийская школа-семинар «Физика и применение микроволн» имени А.П. Сухорукова («Волны-2017»), Физический факультет МГУ, Дом отдыха «Красновидово», Россия, 4-9 июня 2017.

1.12 Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации 115 страниц, включая 25 рисунков. Список литературы насчитывает 186 наименований.

Глава 2

Собственные частоты резонаторов с МШГ

2.1 Обзор литературы

Единственными формами диэлектрических резонаторов, позволяющими получить точное аналитическое решение для собственных мод и собственных частот, являются сфера [4, 5] и цилиндр. Применение тороидальных [6, 7], дисковых [8] и высокочастотных веретенообразных резонаторов [9] из различных материалов породило интерес к приближенным методам анализа частот и распределения поля в произвольных выпуклых телах вращения. Хотя численное моделирование, и в том числе метод конечных элементов [10], за последние годы становится все более доступным и удобным, но они не всегда могут заменить желаемые аналитические формулы.

Для нескольких применений резонаторов шепчущей галереи, в особенности для генерации Керровских гребенок [3, 11], возможность точного расчета собственных частот и их пространственной дисперсии является необходимой для оптимизации приборов. Как было продемонстрировано в [12], узкополосные гребенки намного более интересны, чем обычные гребенки на микрорезонаторах с экваториальными модами, так как дисперсию, обуславливающую процесс генерации гребенки, для поперечных мод контролировать намного проще. Дисперсия второго порядка сильно влияет на процесс генерации гребенки. В работе [12] было предложено, что небольшие изменения формы поверхности могут контролировать дисперсию семейств поперечных мод. Уменьшив дисперсию второго порядка в материале за счет изменения формы резонатора, можно уменьшить и минимальную мощность, необходимую для генерации гребенки, что соответственно уменьшит и тепловые шумы.

Для резонаторов с отличной от сферической и цилиндрической форм разрешить ана-

литически уравнения для распределения поля не удается. Для получения аналитических выражений в качестве неидеальных резонаторов чаще всего рассматривают сфероид. Частоты сфероида можно найти, используя собственные функции сфероида, широко рассмотренные в литературе. Проблема нахождения собственных функций была исследована в связи с задачами квантовой механики о двухатомной молекуле, в которой электронная плотность значительно лучше описывается сфероидальными функциями, нежели сферическими [13] а так же в теории антенн и рассеяния электромагнитных волн [14].

Однако, на текущий момент подходящих приближений для случая резонаторов с МШГ нет. Поэтому применяются различные приближенные методы, дающие достаточно точные приближения для частот и пространственной дисперсии фундаментальной и поперечной мод сплюснутых и вытянутых сфероидов.

Существует несколько различных методов, подходящих для резонаторов с МШГ. Наиболее простые основаны на геометрической интерпретации мод шепчущей галереи. Наиболее простой такой метод основан на том, что для получения устойчивой траектории луча в резонаторе необходимо, чтобы на ней укладывалось целое число длин световых волн. При этом оказывается, что относительный сдвиг частоты пропорционален относительному изменению длины геодезической кривой [15]. Этот метод, однако, годится только для резонаторов с небольшой степенью сжатия.

Более точные методы основаны на приближенном решении уравнения Гельмгольца. При стандартной замене переменных, убирающей первую производную, уравнение становится по структуре схоже со стационарным уравнением Шредингера, которое достаточно хорошо изучено. В роли потенциала выступает диэлектрическая поверхность резонатора.

Отличительной особенностью приближенного решения уравнения Гельмгольца для сфероида является то, что несколько параметров уравнения должны быть одновременно велики и соответствующего порядка. Во-первых, размер резонатора a должен быть много больше длины волны: $ak \approx m$, где a — радиус резонатора, k — волновое число, соответствующее собственной частоте и m — азимутальный индекс моды. Во вторых, константа разделения углового и радиального уравнений должна быть пропорциональна квадрату m : $\lambda \propto m^2$, и, в третьих, азимутальный индекс моды m должен быть много больше 1.

Наиболее физически простой метод — метод ВКБ, позволяющий найти собственные частоты в квазиклассическом приближении.

В работе [16] рассматривается решение уравнения Гельмгольца в системе координат, связанной со сплюснутым сфероидом. Решения уравнения Гельмгольца ищутся в приближении, соответствующем резонаторам с МШГ. Для радиальной и угловой частей уравнения Гельмгольца строятся асимптотические разложения решений по методу эталонного уравнения Лангера-Дородницына. Собственные частоты находятся с помощью квантования полу-

ченных разложений методом ВКБ. Результаты работы, к сожалению, в не содержат простых алгебраических выражений для собственных частот, пригодных для дальнейшего использования.

В работе [17] были рассмотрены приближения для нахождения собственных частот сфероидов для решения задачи рассеяния на эллиптических частицах, в случае, если частицы сравнимы с длиной волны. Распределение поля и собственные частоты ищутся с помощью метода ВКБ. Аналитически были получены выражения для распределения поля и собственных частот сфероидов. Для собственных частот точность полученных выражений от 4% до 10%. К сожалению, результаты для расчета собственных частот МШГ не пригодны, так как приближения построены только для больших λ и m .

В работе [18] рассматривается рассеяние прозрачными сфероидов и исследуются квазиклассическим методом радиальные функции. Аналогично [17], находятся собственные частоты и ширины линий. Для задачи нахождения интенсивности рассеяния от частоты, получается хорошее согласование полученных приближений с численными выражениями для мод шепчущей галереи. Таким образом, узкие пики на зависимости сечения от частоты могут быть определены с точностью до 10%, определяемой точностью исходных приближений для собственных частот.

В работе [13] рассматривалось решение задачи методом ВКБ, с предварительным преобразованием координат. Как известно, сфероидальные уравнения для угловых и радиальных компонент переходят в сферические, если расстояние между фокусами стремится к нулю. В работе было показано, что существует такое преобразование координат, что от дифференциального уравнения для угловых сфероидальных функций можно перейти к уравнению для сферических. Аналогично было показано, что можно сделать преобразование для радиальных функций, приводящих уравнение к похожему уравнению для функции Бесселя. Такие приближения оказываются достаточно точными и для радиальной и для угловой частей. Для параметра разделения λ получается простая и достаточно точная формула сплюснутых сфероидов. К сожалению, в данной работе детально не рассматривается задача нахождения предельно точных приближений для собственных частот резонаторов с МШГ, а лишь строятся приближения для распределения поля внутри сфероидального резонатора.

Существует также некоторое число сугубо аналитических методов нахождения приближенных решений уравнения Гельмгольца.

В работе [14] рассматривается расчет для радиального уравнения и углового уравнения методом Олвера. Для угловых функций строится решение через функции Эрмита и Полиномы Лежандра, для радиального уравнения строятся две собственные функции, пропорциональные функциям Эйри. Для нахождения аргументов функции Эйри в радиальной части аппроксимировались эллиптические интегралы для больших значений λ . Полученные

результаты хорошо описывают сплюснутые сфероиды, однако, в связи с аппроксимацией эллиптических интегралов с небольшой точностью, они позволяют найти собственные частоты весьма приближенно, что непригодно для задач оценки дисперсии.

Таким образом, в литературе описаны различные ситуации, но приближения для МШГ высоких порядков в сфероиде, размеры которого велики по сравнению с длиной волны, рассмотрены не были. В работах, подходящих для определения собственных частот РШГ полученные приближения для собственных частот не охватывают дисперсию поперечных МШГ из-за недостаточной точности.

Для нахождения приближений для собственных частот в данной работе был выбран метод ВКБ, так как он обладает простым физическим смыслом и позволяет с хорошей точностью получать решения уравнения Гельмгольца.

2.2 Микрорезонатор и системы координат

В настоящей работе рассматриваются резонаторы различных форм. Остановимся подробнее на каждой из них.

Для описания форм микрорезонаторов используются различные системы координат. Критерием выбора системы координат является простота записи уравнений для поля и граничных условий. Обычно координаты выбираются таким образом, чтобы одна из координатных поверхностей совпадала с границей резонатора, что приводит к граничным условиям Дирихле первого рода.

В представленной работе рассматриваются исключительно осесимметричные резонаторы с осью симметрии z . Показатель преломления резонаторов считается изотропным и обозначается n или n_r , если в системе существуют дополнительные показатели преломления.

Предположим, что поле распространяется в экваториальной плоскости xy около границы. Ось, перпендикулярную экваториальной плоскости, будем называть осью z . Радиус резонатора в экваториальной плоскости будем обозначать a или R .

Задача поиска собственных частот сводится к нахождению стационарных решений волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \Delta E, \quad (2.1)$$

которое при $E(t) = E(r)e^{-i\omega t}$ можно свести к уравнению Гельмгольца:

$$\Delta E + k^2 E = 0. \quad (2.2)$$

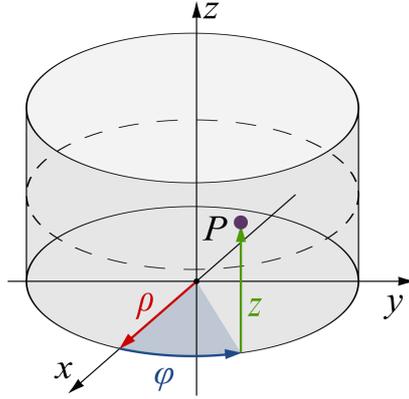


Рис. 2.1: Цилиндрическая система координат

2.2.1 Цилиндрическая система координат

Цилиндрическая система (2.1) часто используется для описания мод микрорезонатора, однако, на практике резонаторы с МШГ с цилиндрической формой достаточно редки. Связь цилиндрических координат с декартовыми проста:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\y &= \rho \sin \phi \\z &= z\end{aligned}$$

Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат записывается как:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.3)$$

и решение уравнения Гельмгольца можно найти в виде:

$$\Psi(\rho, \phi, z) = Z_m(\sqrt{k^2 - \beta^2} \rho) e^{\pm i\beta z \pm im\phi}, \quad (2.4)$$

где $Z(m)$ определяет радиальное распределение поля, β — постоянная распространения вдоль оси z . Если $k_\rho = \sqrt{k^2 - \beta^2}$, то собственные частоты с нулевыми граничными условиями определяются из соотношения:

$$k_\rho a = T_{m,q}, \quad (2.5)$$

где $T_{m,q}$ — q -тый корень функции Бесселя m -того порядка.

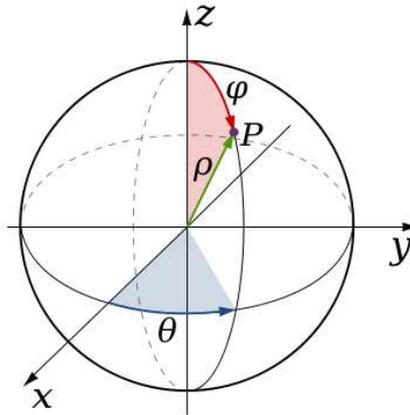


Рис. 2.2: Сферическая система координат

2.2.2 Сферическая система координат

Самая распространенная форма микрорезонаторов - сферическая. Для нее используется сферическая система координат (2.2), центр которой совпадает с центром микрорезонатора. Связь декартовых координат со сферическими записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

и также в обратную сторону:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arccos \frac{z}{r} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Лапласиан записывается в виде

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

При этом решением скалярного уравнения Гельмгольца $\Delta e + k^2 e = 0$ для электрического поля и аналогично для магнитного будет являться:

$$e = C f_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (2.6)$$

а для векторного случая:

$$\vec{e}_{TE} = C_{TE} \frac{f_\ell(kr)}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\frac{imY_{\ell m}(\theta, \phi)}{\sin \theta} \vec{i}_\theta - \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \vec{i}_\phi \right), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_{TE} = & -C_{TE} \frac{i}{k_0 r c \sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \phi) f_\ell(kr) \vec{i}_r + \right. \\ & \left. + \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{\partial(r f_\ell(kr))}{\partial r} \vec{i}_\theta + \frac{im}{\sin \theta} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \frac{\partial(r f_\ell(kr))}{\partial r} \vec{i}_\phi \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_{TM} = & C_{TM} \frac{1}{kr \sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \phi) f_\ell(kr) \vec{i}_r + \right. \\ & \left. + \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{\partial(r f_\ell(kr))}{\partial r} \vec{i}_\theta + \frac{im}{\sin \theta} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \frac{\partial(r f_\ell(kr))}{\partial r} \vec{i}_\phi \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\vec{b}_{TM} = -C_{TM} \frac{im f_\ell(kr)}{c \sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\frac{imY_{\ell m}(\theta, \phi)}{\sin \theta} \vec{i}_\theta - \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \vec{i}_\phi \right), \quad (2.10)$$

где C , C_{TE} и C_{TM} – нормировочные константы, $\ell = m + p$, m – азимутальный индекс моды, а p характеризует количество максимумов поля в меридиональной плоскости. При этом радиальная составляющая $f_\ell(kr)$ определяется через функции Рикатти-Бесселя $\psi_\ell(x) = \sqrt{\pi x/2} J_{\ell+1/2}(x)$ и $\chi_\ell(x) = -\sqrt{\pi x/2} N_{\ell+1/2}(x)$ ($J_{\ell+1/2}(x)$ и $N_{\ell+1/2}(x)$ – цилиндрические функции Бесселя и Неймана полуцелого порядка).

Для нахождения собственных частот металлической сферы с нулевыми граничными условиями $f_\ell(kr)|_{r=a} = 0$ можно получить:

$$nk_0 a = T_{m+1/2, q} \quad (2.11)$$

где k_0 – волновой вектор в вакууме, $T_{m+1/2, q}$ – q -ый корень функции Бесселя полуцелого порядка $m + 1/2$.

Можно также получить характеристическое уравнение для случая диэлектрической среды с показателем преломления n . В этом случае нужно учитывать, что на границе поле испытывает скачок. Радиальная часть в этом случае снаружи будет состоять из сферической функции Бесселя и Неймана, так как функция Неймана расходится только в 0. Обозначим общее решение снаружи за ξ_l . При этом характеристическое уравнение:

$$n_P \frac{j_l'(nk_0 a)}{j_l(nk_0 a)} = \frac{\xi_l'(nk_0 a)}{\xi_l(nk_0 a)} \quad (2.12)$$

где $P = 1$ для ТЕ мод и $1/n^2$ для ТМ. Аналитически это уравнение не разрешается, но можно получить поправку, связанную с граничными условиями, если искать ее в виде малой добавки к известному решению для сферы.

2.2.3 Сфероидальная система координат

Наиболее распространенная система координат для описания несферических резонаторов — сфероидальная. Оси и углы в ней отсчитываются аналогично сферической системе координат, а длина полуоси b вдоль оси z .

Сфероидальные координаты соотносятся с декартовыми как:

$$x = \frac{d}{2} \sqrt{(\xi^2 - s)(1 - \eta^2)} \cos \phi \quad (2.13)$$

$$y = \frac{d}{2} \sqrt{(\xi^2 - s)(1 - \eta^2)} \sin \phi \quad (2.14)$$

$$z = \frac{d}{2} \eta \theta \quad (2.15)$$

где $s = +1$ для вытянутых сфероидов, и $s = -1$ для сплюснутых. При $\xi = const$ координаты описывают сфероиды вращения, а при $\eta = const$ — гиперболоиды. Уравнение Гельмгольца для поля ϕ выглядит как:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - s) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \left(c^2 (\xi^2 - s \eta^2) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} - s \frac{m^2}{\xi^2 - s} \right) \psi = 0, \quad (2.16)$$

где $c = kd/2$. Если искать решение в виде:

$$\psi = R_{ml}(c, \xi) S_{ml}(c, \eta) e^{im\phi}, \quad (2.17)$$

переменные можно разделить для радиальной и угловой частей:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - s) \frac{\partial R}{\partial \xi} - \left(\lambda_{ml} - c^2 \xi^2 + s \frac{m^2}{\xi^2 - s} \right) R = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial S}{\partial \eta} - \left(\lambda_{ml} - s c^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right) S = 0, \quad (2.19)$$

где λ_{ml} — константа разделения.

В работе также рассматривается форма резонатора более общая по сравнению со сфероидом — квартика - поверхность, описываемая уравнением четвертого порядка в декартовых координатах:

$$f(z) = a \sqrt{1 - \frac{z^2}{b^2} - \mu \frac{z^4}{b^4}} \quad (2.20)$$

За счет дополнительного параметра квартика с большей точностью пересчитывается в другие гладкие формы, в том числе в тороидальную [19]. При этом для квартики явно не выписывается и не решается уравнение Гельмгольца ввиду его сложности, а квартика рассматривается

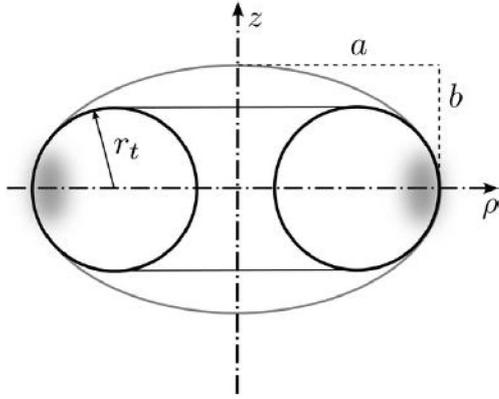


Рис. 2.3: Иллюстрация аппроксимации тороида сфероидом

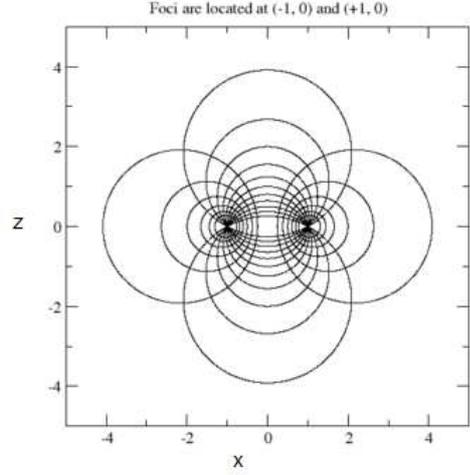


Рис. 2.4: Тороидальные координаты

лишь как возмущение сфероидальной формы.

2.2.4 Тороидальная система координат

Тороидальные резонаторы достаточно часто используются в экспериментах и проще всего описываются тороидальной системой координат (2.3). Она связана с декартовой следующим образом:

$$x = f \cos \phi \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (2.21)$$

$$y = f \sin \phi \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (2.22)$$

$$z = f \frac{\sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (2.23)$$

При $\eta = const$ уравнения описывают сферы радиуса $R_s = \frac{f}{|\sin \eta|}$ с центром, расположенным в точке $z_{center} (0, 0, f \cot \eta)$. Для тороидальной системы координат можно получить полезное соотношение:

$$z_{center}^2 - R_s^2 = f^2 \quad (2.24)$$

При $\xi = const$ формируется тор, осевая окружность которого имеет радиус $R_a = f \coth \xi$, а в поперечном сечении окружность с радиусом $r = \frac{f}{\sinh \xi}$. На рисунке (2.4) показан “разрез” тороидальных координат при заданном угле ϕ , характеризующем поворот вокруг оси z . Для простоты выбран угол $\phi = 0$, что соответствует плоскости xz .

Далее тороиды будут описываться не тороидальными, а "псевдополярными" координатами, использующими два радиуса: r - радиус окружности в сечении тороида, а R - наружный радиус тора. Следовательно, осевая окружность тора будет иметь радиус $R_a = f \coth \xi = R - r$. Легко получить соотношение, справедливое для выбранных таким образом координат:

$$f^2 = R_a^2 + r^2 = (R - r)^2 - r^2 = R(R - 2r) \Rightarrow \quad (2.25)$$

$$f = \sqrt{R(R - 2r)} \quad (2.26)$$

2.3 Расчет собственных частот резонаторов с МШГ

2.3.1 Собственные частоты диэлектрической сферы

Для характеристического уравнения легко найти лишь первую малую поправку. Однако, существует метод, позволяющий получить разложение для собственной частоты по обратным степеням азимутального индекса m . Подобный метод описан в работе Шиллера [20].

В оригинальной работе обозначения немного отличаются от используемых здесь, но для изложения полученных результатов будем придерживаться именно их. В ходе работы рассматривалось разложение характеристического уравнения по большому параметру ν , который в настоящей работе обозначается как m . Для диэлектрической сферы с показателем преломления m характеристическое уравнение выглядит следующим образом:

$$\tilde{Y}_\nu(x) \left(\frac{p-1}{2} J_\nu(mx) + pmx J'_\nu(mx) \right) - \sqrt{\nu^2 - x^2} J_\nu(mx) \tilde{Y}'_\nu(x) = 0, \quad (2.27)$$

где

$$\tilde{Y}_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\nu} Y_\nu(x) \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{\nu^2}} e^{\nu \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{\nu^2}} - \text{arcCosh}\left(\frac{\nu}{x}\right) \right)} \quad (2.28)$$

$$\tilde{Y}'_\nu(x) = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\nu}} x Y'_\nu(x) e^{\nu \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{\nu^2}} - \text{arcCosh}\left(\frac{\nu}{x}\right) \right)}}{\sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{\nu^2}}} \quad (2.29)$$

и $p = 1$ для ТЕ мод и $p = 1/n^2$ для ТМ мод, что соответствует параметру P , а x соответствует радиальной координате.

Воспользовавшись разложением Дебая для функций Неймана $Y_\nu(\nu \text{sech } \alpha)$ ([21] формула

9.3.8) получаем:

$$Y_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha) \approx -\frac{e^{\nu(a-\tanh \alpha)}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi\nu \tanh \alpha}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{u_k(\coth \alpha)}{\nu^k} \right), \quad (2.30)$$

$$u_0(t) = 1, \quad u_1(t) = \frac{1}{24} (3t - 5t^3), \quad u_2(t) = \frac{385t^6 - 462t^4 + 81t^2}{1152}, \quad (2.31)$$

$$u_3(t) = \frac{-425425t^9 + 765765t^7 - 369603t^5 + 30375t^3}{414720}, \quad (2.32)$$

$$u_4(t) = \frac{185910725t^{12} - 446185740t^{10} + 349922430t^8 - 94121676t^6 + 4465125t^4}{39813120} \quad (2.33)$$

и для ее производной ([21] формула 9.3.12)

$$Y'_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha) \approx \sqrt{\frac{\sinh 2\alpha}{\pi\nu}} e^{\nu(a-\tanh \alpha)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{v_k(\coth \alpha)}{\nu^k} \right), \quad (2.34)$$

$$v_0(t) = 1, \quad v_1(t) = \frac{1}{24} (7t^3 - 9t), \quad v_2(t) = \frac{-455t^6 + 594t^4 - 135t^2}{1152}, \quad (2.35)$$

$$v_3(t) = \frac{475475t^9 - 883575t^7 + 451737t^5 - 42523t^3}{414720} \quad (2.36)$$

и, пользуясь тем, что в нашем случае

$$\operatorname{sech}(\alpha) = x/\nu, \quad \cosh(\alpha) = \nu/x$$

$$1 = -\sinh(\alpha)^2 + \cosh(\alpha)^2$$

$$\sinh(\alpha)^2 = \cosh(\alpha)^2 - 1 = (\nu/x)^2 - 1$$

$$\tanh(\alpha) = \sinh(\alpha)/\cosh(\alpha) = ((\nu/x)^2 - 1)^{1/2} x/\nu = (1 - (x/\nu)^2)^{1/2}$$

и также

$$\sinh(2\alpha) = 2 \cosh(\alpha) \sinh(\alpha)$$

$$\sinh(2\alpha) = 2(\nu/x)((\nu/x)^2 - 1)^{1/2}$$

перепишем формулы, избавившись от гиперболических функций в аргументе. Для того, чтобы избавиться от функций Бесселя вблизи точки поворота, используют следующие выраже-

ния ([21] формула 9.3.23)

$$J_\nu(\nu + z\nu^{1/3}) \approx \frac{2^{1/3}}{\nu^{1/3}} Ai(-2^{1/3}z) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(z)}{\nu^{2k/3}} \right) + \frac{2^{2/3}}{\nu} Ai'(-2^{1/3}z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(z)}{\nu^{2k/3}} \quad (2.37)$$

$$f_1(z) = -\frac{z}{5}, \quad f_2(z) = \frac{3z^2}{35} - \frac{9z^5}{100}, \quad (2.38)$$

$$f_3(z) = \frac{957z^6}{7000} - \frac{173z^3}{3150} - \frac{1}{225} \quad (2.39)$$

$$f_4(z) = \frac{27z^{10}}{20000} - \frac{23573z^7}{147000} + \frac{5903z^4}{138600} + \frac{947z}{346500}. \quad (2.40)$$

Воспользуемся тем, что производные всех порядков от функции Эйри зависят только от самой функции Эйри и ее производной:

$$Ai''(x) = xAi(x), \quad Ai'''(x) = Ai(x) + xAi'(x), \quad (2.41)$$

$$Ai^{(4)}(x) = x^2Ai(x) + 2Ai'(x), \quad Ai^{(5)}(x) = 4xAi(x) + x^2Ai'(x), \quad (2.42)$$

что дает возможность значительно упростить исходную систему при разложении функции Эйри около ее нуля. Решение характеристического уравнения ищется в виде:

$$x_n^{(l)} = \frac{\nu}{m} - \frac{\sqrt[3]{\nu}\zeta_l}{\sqrt[3]{2}m} + \frac{d_0}{\sqrt{m^2-1}} + \frac{d_1}{(m^2-1)\sqrt[3]{\nu}} + \dots \quad (2.43)$$

Подставляя все выражения в характеристическое уравнение и раскладывая по ν , получим ряд, коэффициенты которого будут обращаться в 0 последовательным нахождением неизвестных коэффициентов d_i . Ввиду того, что выражение слишком громоздко и в дальнейшем не используется, здесь оно не приводится.

2.3.2 Разложение для случая цилиндра

Для получения аналогичного разложения в случае бесконечного цилиндра воспользуемся характеристическим уравнением для цилиндра:

$$(xY_\nu(x))J'_\nu(mx) - pmJ_\nu(mx)Y'_\nu(x)\sqrt{\nu^2 - x^2} = 0 \quad (2.44)$$

Производя аналогичные описанным выше преобразования, получим:

$$\begin{aligned}
d_0 &= -\frac{1}{m^2 p} \\
d_1 &= \frac{3(m^2 - 1)\zeta_l^2}{10 \cdot 2^{2/3} m} \\
d_2 &= \frac{(3m^4 p^2 - 2)\zeta_l}{3\sqrt[3]{2} m^4 p^3} \\
d_3 &= \frac{m^4(m^2 - 1)^2 p^4 \zeta_l^3 + 10(m^8 p^4 - 2m^6 p^4 + m^4 p^2(p^2 - 35p + 35) + 35m^2 p^2 - 35)}{700m^5 p^4} \\
d_4 &= -\frac{(3m^8 p^4 + 12m^6 p^4 - 12m^4 p^2 - 8m^2 p^2 + 8)\zeta_l^2}{10 \cdot 2^{2/3} m^6 p^5}.
\end{aligned}$$

Возвращаясь к принятым в работе обозначениям, разложение для собственной частоты будет выглядеть

$$\begin{aligned}
k_0 n a &= T_{m,q} - \frac{n\tilde{P}}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{\alpha_q(3 - 2\tilde{P}^2)\tilde{P}n^3}{6(n^2 - 1)^{3/2}} \left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} \\
&\quad - \frac{n^2\tilde{P}(\tilde{P} - 1)(\tilde{P}^2 n^2 + \tilde{P}n^2 - 1)}{4(n^2 - 1)^2} \left(\frac{m}{2}\right)^{-1} + O(m^{-3}).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

2.3.3 Приближенные методы

Объекты с формой, отличной от сферической, для оптических резонаторов с МШГ достаточно изучены, однако, всех необходимых аналитических выражений не существует. Частоты сфероида можно найти, используя собственные функции сфероида, широко рассмотренные в литературе. Однако, нет подходящих приближений для случая, когда квантовые числа m , l , и s одновременно велики и одного порядка. Поэтому применяются приближенные методы, дающие достаточно точные приближения для частот и пространственной дисперсии фундаментальной и поперечной моды сплюснутых и вытянутых сфероидов. Также все ранее полученные приближенные формулы не охватывают дисперсию поперечных МШГ.

2.3.3.1 Метод ВКБ для тел вращения

Уравнение Гельмгольца является уравнением второго порядка и при стандартной замене переменных его можно свести к виду, аналогичному стационарному уравнению Шредингера. Роль потенциала играет диэлектрическая поверхность резонатора. Пользуясь формулой $\rho\sqrt{k^2 - \beta^2} = y_{m,q}$, где $y_{m,q}$ — корни характеристического уравнения, которые приближенно можно положить $y_{mq} = T_{m,q}$, воспользуемся методом ВКБ и найдем значение собственной

частоты:

$$\oint \beta(z) dz = \int_{-z_c}^{z_c} \sqrt{k^2 - \frac{\tilde{y}_{m,q}^2}{\rho^2(z)}} dz = 2\pi \left(p + \frac{1}{2} \right) \quad (2.46)$$

причем в точке z_c подынтегральное выражение обращается в ноль, то есть является точкой поворота.

Так же методом ВКБ можно пользоваться и для других уравнений второго порядка, если удастся сделать замены переменных, приводящие эти уравнения к виду уравнения Шредингера. Для нахождения собственных частот Сумецким был предложен метод [22], основанный на квазиклассическом квантовании поперечного волнового вектора β аналогично тому, как это делается в квантовой механике. Подобный метод был также применен в [6]. В адиабатическом приближении кривизна поверхности $\rho_s(z)$ слабо по сравнению с длиной волны зависит от поперечной координаты z и $\beta \ll k_0$. Тогда поле может быть описано как:

$$\Psi \propto e^{\pm i \int \beta(z) dz \pm im\phi} R(\rho/\rho_s), \quad (2.47)$$

где

$$\beta(z) = \sqrt{k^2 - \frac{\tilde{y}_{m,q}^2}{\rho_s^2(z)}}, \quad (2.48)$$

$\tilde{y}_{m,q}$ – собственные частоты характеристического уравнения для бесконечного цилиндра с соответствующими граничными условиями, $R(\rho/\rho_s(z))$ – радиальные функции, пропорциональные функциям Бесселя $J(\tilde{y}_{m,q}\rho/\rho_s)$ внутри резонатора и функциям Ханкеля $H^{(1)}(\tilde{x}_{m,q}\rho/\rho_s)$ снаружи него. Для простого случая нулевых граничных условий $\sqrt{k^2 - \beta(z)^2}\rho_s = \tilde{y}_{m,q} = ka = T_{m,q}$, где $T_{m,q}$ q -ый корень функции Бесселя $J_m(T_{m,q}) = 0$ и a радиус цилиндра.

Применим описанный метод для поверхности квартики. Предположим, что подкоренное выражение имеет 2 корня (2.20) при локализации моды в малом объеме у экваториальной области:

$$\begin{aligned} k^2 \rho_s^2 &= \tilde{y}^2 \left(1 - \frac{z^2}{b^2} - \mu \frac{z^4}{b^4} \right) = \tilde{y}_{m,q}, \\ z^4 + \frac{b^2}{\mu} z^2 - \frac{b^4}{\mu} (1 - \tilde{y}_{m,q}^2/\tilde{y}^2) &= 0, \\ z_c^2 &= \frac{b^2}{2\mu} \left(\sqrt{1 + 4\mu(1 - \tilde{y}_{m,q}^2/\tilde{y}^2)} - 1 \right), \\ \frac{2\tilde{y}}{ab} \int_{-z_c}^{z_c} \sqrt{\frac{(z_c^2 - z^2)(1 + (z_c^2 + z^2)\mu/b^4)}{1 - z^2/b^2 - \mu z^4/b^4}} dz &= \pi(2p + 1). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Введем новую переменную $\eta_c = z_c/b$, $z = z_c \sin \psi$, много меньшую 1:

$$\begin{aligned}
& \frac{4\tilde{y}\eta_c^2 b}{a} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \psi \sqrt{\frac{1 + \mu(1 + \sin^2 \psi)\eta_c^2}{1 - \eta_c^2 \sin^2 \psi - \mu\eta_c^4 \sin^4 \psi}} d\psi \\
&= \frac{4\tilde{y}_{mq}\eta_c^2 b}{a\sqrt{1 - \eta_c^2 - \mu\eta_c^4}} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \psi \sqrt{\frac{1 + \mu(1 + \sin^2 \psi)\eta_c^2}{1 - \eta_c^2 \sin^2 \psi - \mu\eta_c^4 \sin^4 \psi}} d\psi \\
&\simeq \frac{\tilde{y}_{mq}\eta_c^2 \pi b}{a} \left(1 + \frac{5}{8}(1 + \mu)\eta_c^2 + \frac{1}{64}(31 + 62\mu - 13\mu^2)\eta_c^4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1024}(417 + 1251\mu + 231\mu^2 + 141\mu^3)\eta_c^6 \right) = \pi(2p + 1). \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Последнее выражение может быть разложено в ряд по \tilde{y} :

$$\eta_c^2 = \tau \left(1 - \frac{5(1 + \mu)}{8}\tau + \frac{19 + 38\mu + 63\mu^2}{64}\tau^2 - \frac{117 + 351\mu + 1531\mu^2 + 2041\mu^3}{1024}\tau^3 + \dots \right), \tag{2.51}$$

где $\tau = \frac{(2p+1)a}{\tilde{y}_{mq}b}$. Окончательно получим выражение для \tilde{y} :

$$\tilde{y} \simeq \tilde{y}_{mq} \left(1 + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{16}(1 + 3\mu)\tau^2 - \frac{1}{128}(1 + 6\mu + 17\mu^2)\tau^3 \right). \tag{2.52}$$

Подставляя выражение $m = \ell - p$ и разложение для корней Бесселя $\tilde{y}_{mq} = T_{mq}$ [23] получим решение

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{\ell pq} \simeq \ell - \alpha_q \left(\frac{\ell}{2} \right)^{1/3} + \frac{2p(a-b) + a}{2b} + \frac{3}{20}\alpha_q^2 \left(\frac{\ell}{2} \right)^{-1/3} + \\
+ \frac{\alpha_q p}{6} \left(\frac{\ell}{2} \right)^{-2/3} + \left(\frac{\alpha_q^3 + 10}{1400} + \frac{(1 + 3\mu)(2p + 1)^2 a^2}{32b^2} \right) \left(\frac{\ell}{2} \right)^{-1}. \tag{2.53}
\end{aligned}$$

Для проверки воспользуемся аналитическим разложением корня характеристического уравнения $T_{\ell+1/2,q}$ для сферы ((2.53)). Легко заметить, что пятый член, пропорциональный $\ell^{-2/3}$, неверен, так как собственные частоты мод с одинаковыми ℓ и q должны быть вырождены и не должны зависеть от p . Однако, первая часть коэффициента при шестой степени ℓ^{-1} не зависит от p , что верно, но во второй части коэффициента есть проблемы с зависимостью от p , аналогичные проблемам в пятом члене.

2.3.3.2 Метод Эйконала и квантование Энштейна-Бриллюэна-Келлера (ЕБК)

Метод Эйконала - это квазиклассический метод, позволяющий найти асимптотическое решение уравнения Гельмгольца в случае, если показатель преломления среды слабо меняется на масштабах длины волны.

Решение уравнения Гельмгольца $\Delta\psi - n^2k^2(\vec{r})\psi = 0$ будем искать в виде плоских волн, раскладывая поле по обратным степеням волнового числа k_0 :

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\vec{r})}{(ik_0)^m} e^{ik_0S(\vec{r})}, \quad (2.54)$$

где $S(\vec{r})$ имеет размерность длины и обычно называется эйконалом.

Подставляя решение, записанное в таком виде в уравнения Гельмгольца, и приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему уравнений:

$$(\nabla S)^2 = n^2 \quad (2.55)$$

$$2(\nabla A_0 \nabla S) + A_0 \Delta S = 0 \quad (2.56)$$

$$2(\nabla A_m \nabla S) + A_m \Delta S = -\Delta A_{m-1} \quad (2.57)$$

Полученные уравнения позволяют получить решение уравнения Гельмгольца с любой точностью. Но рассматривается лишь первое уравнение, с помощью которого можно найти собственные частоты. Для того, чтобы получить собственные частоты методом эйконала, воспользуемся модифицированным условием квантования Бора-Зоммерфельда. Обычное квазиклассическое приближение квантовой механики выглядит следующим образом:

$$\oint k^* dx = 2\pi q \quad (2.58)$$

В методе эйконала роль локального волнового вектора выполняет $\vec{k}^* = k_0 \vec{\nabla} S$, а при более точном рассмотрении, полученном Келлером в [24], правая часть модифицируется и получается

$$k_0 \oint \vec{\nabla} S d\vec{s} = 2\pi \left(q + \frac{q'}{2} + \frac{q''}{4} \right) \quad (2.59)$$

где q' - количество отражений от границы с нулевым граничным условием и q'' - количество касаний акустической поверхности.

Такая модификация связана с двумя факторами. Во-первых, известно, что при касании границы с нулевыми граничными условиями происходит набег фазы на π , поэтому, если касаний на траектории было q' , то фаза изменится на $q'\pi$. При касании акустической поверхности необходимо сшивать квазиклассическое решение с линеаризованным решением вблизи точки поворота [24]. Поэтому при касании акустической поверхности необходимо добавлять фазу $\frac{\pi}{2}$.

У мод ШГ поле внутри резонатора распространяется в небольшой области вблизи поверх-

ности. Поэтому, будем считать, что существует каустическая поверхность — поверхность, к которой все лучи являются касательными. Для сферы таких поверхностей две — вложенная сфера и конус (точнее сказать, два конуса с общим центром и совпадающими осями симметрии).

Рассмотрим метод эйконала для сферы. Будем искать решение для эйконала в виде $S(r, \eta, \phi) = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\phi(\phi) + S_0$. Подставим его в уравнение (2.55).

$$\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_\phi}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2 = n^2 \quad (2.60)$$

Разделяя переменные получим 3 уравнения:

$$\frac{\partial S_\phi}{\partial \phi} = M \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} = \pm \sqrt{L^2 - \frac{M^2}{\sin^2 \theta}} \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial r} = \pm \sqrt{n^2 - \frac{L^2}{r^2}} \quad (2.63)$$

где M и L — константы разделения. Теперь проинтегрируем эти уравнения. Первое уравнение для замкнутой траектории интегрируется по ϕ от 0 до 2π , что соответствует полному обороту. Второе уравнение интегрируется от θ_{c1} до θ_{c2} , что соответствует проходу от верхнего каустического конуса до нижнего и обратно. При этом дважды происходит касание каустических поверхностей, поэтому добавляется фаза π . Для третьего уравнения интегрируется от каустической сферы до поверхности, то есть от a_c до a , и, следовательно, добавляется $\pi + \pi/2$ за счет касания поверхности и каустики.

Для того, чтобы найти собственные частоты, необходимо проинтегрировать систему уравнений. Однако, согласно работе [25], можно воспользоваться несколько отличающимися выражениями. Интегрирование по замкнутым геодезическим кривым можно заменить на разницу между геодезическими путями на каустической поверхности. Путь для угла ϕ по каустической окружности остается без изменений. Интеграл для S_r соответствует разнице длин двух траекторий, одна из которых — это дуга на пересечении каустического конуса и каустической окружности, а вторая — геодезическая траектория по поверхности каустического конуса от каустической сферы до поверхности резонатора. И, наконец, интеграл для S_θ эквивалентен разнице между дугой, расположенной на пересечении каустического конуса и сферы, и геодезической, идущей по каустической сфере от "верхней" дуги до "нижней" и обратно.

Такой подход можно применять к любому телу, даже если уравнения эйконала для него не разделяются. Достаточно, чтобы существовали каустические поверхности: $g(z)$, вложенная в

поверхность резонатора, и $h(z)$, ограничивающая распределение поля в плоскости, перпендикулярной экваториальной. Иллюстрацию вышесказанного можно увидеть на рисунке (2.5).

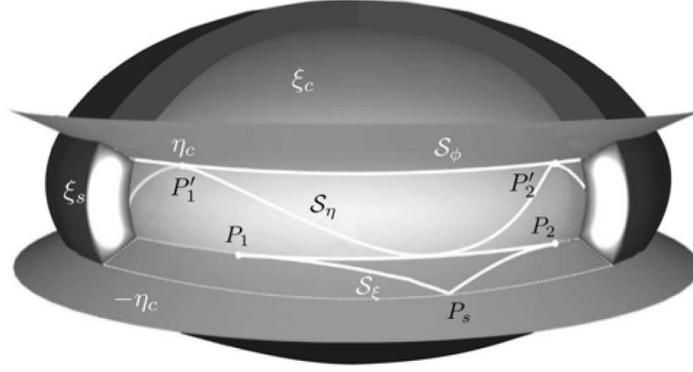


Рис. 2.5: Каустические поверхности и геодезические кривые

Для того, чтобы воспользоваться полученными соотношениями, нам необходимо получить длину геодезической кривой на каустической поверхности резонатора [26]. Покажем эти соотношения для поверхностей, заданных через $g(z)$ и $h(z)$. Длина элемента геодезической кривой, лежащей на каустической поверхности $g(z)$, определяется формулой:

$$ds = \frac{g\sqrt{1+g'^2(z)}}{\sqrt{g^2(z)-g^2(z_c)}} dz, \quad (2.64)$$

а длину дуги на пересечении каустических поверхностей можно найти:

$$ds = \frac{g^2(z_c)\sqrt{1+g'^2(z)}}{g(z)\sqrt{g^2(z)-g^2(z_c)}} dz \quad (2.65)$$

Проинтегрируем эти выражения от $-z_c$ до z_c и найдем их разность. Затем сделаем аналогично для поверхности $h(z)$ и получим итоговые выражения:

$$2\pi nk_0 \rho_c = 2\pi |m| \quad (2.66)$$

$$2nk_0 \int_{z_c}^{z_s} \frac{\sqrt{1+h'^2}\sqrt{h^2-\rho_c^2}}{h} dz = 2\pi(q-1/4) \quad (2.67)$$

$$2nk_0 \int_{-z_c}^{z_c} \frac{\sqrt{1+g'^2}\sqrt{g^2-\rho_c^2}}{g} dz = 2\pi(p+1/2) \quad (2.68)$$

Как было показано в более ранних работах, [27, 28] метод эйконала и квазиклассический метод Энштейна-Бриллюэна-Келлера (ЕБК) [24], могут давать достаточно хорошие асимптотические приближения для собственных частот сфероидов (2.20).

2.3.3.3 ЕБК для сфероида

Данный метод успешно применялся в более ранних работах [27, 28] и использовал унифицированную систему координат для того, чтобы можно было одновременно описывать и сплюснутые и вытянутые сфероиды (2.13). При подстановке в уравнение для эйконала $S(\xi, \eta)$ скалярного или векторного представления поля $A(\xi, \eta)e^{ik_0S}$ в сфероидальных координатах переменные можно разделить. Производя квантование можно получить систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\eta(\eta) &= k_0nd \int_{-\eta_c}^{\eta_c} \frac{\sqrt{(\eta_c^2 - \eta^2)(\xi_c^2 - s\eta^2)}}{1 - \eta^2} d\eta = 2\pi(p + 1/2), \\ \mathcal{S}_\xi(\xi) &= k_0nd \int_{\xi_c}^{\xi_s} \frac{\sqrt{(\xi^2 - \xi_c^2)(\xi^2 - s\eta_c^2)}}{\xi^2 - s} d\xi = 2\pi(q - 1/4), \\ \tilde{y}\sqrt{1 - \eta_c^2}\sqrt{1 - \zeta_c^2} &= m, \end{aligned} \quad (2.69)$$

из решения которой можно найти каустические поверхности $\pm\eta_c$ и ξ_c и затем собственные частоты $\tilde{y} = k_0na$. Пусть $\xi_s = 2b/d$ описывает поверхность сфероидального резонатора, а $\zeta^2 = \frac{\xi^2 - \xi_s^2}{\xi_s^2 - 1}$ малый параметр, заменяющий ξ , $p \geq 0$.

Предположим, что $\zeta_c \ll 1$ и $\eta_c \ll 1$. Это позволяет разложить интегралы по этим малым параметрам и рассчитать их. Трансформируя выражения для ζ_c , η_c как ряд по $(m/2)^{-1/3}$ и подставляя их, можно получить выражения для собственных частот \tilde{y} .

$$\begin{aligned} \eta_c^2 &= \frac{(2p+1)a}{b}m^{-1} \left[1 - \frac{\beta_q(a^2 - b^2)}{2b^2} \left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} - \frac{a(5b^2 + a^2)(2p+1)}{16b^3} \left(\frac{m}{2}\right)^{-1} \right] + o(m^{-4/3}), \\ \zeta_c^2 &= -\beta_q \left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} \left[1 + \frac{3\beta_q}{5} \left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} - \frac{(2p+1)a^3}{6b^3} \left(\frac{m}{2}\right)^{-1} + \frac{48\beta_q^2}{175} \left(\frac{m}{2}\right)^{-4/3} \right] + o(m^{-5/3}), \\ nk_0a &= m - \beta_q \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{(2p+1)a}{2b} + \frac{3\beta_q^2}{20} \left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} - \frac{\beta_q(2p+1)a^3}{12b^3} \left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} \\ &\quad + \left(\frac{\beta_q^3}{1400} + \frac{(2p+1)^2a^2(b^2 - a^2)}{32b^4} \right) \left(\frac{m}{2}\right)^{-1} + O(m^{-5/3}), \end{aligned} \quad (2.70)$$

В предыдущих работах 6-ой член, пропорциональный $(m/2)^{-1}$, не рассматривался, так как он отличается от точного разложения для собственных частот сферы на $\frac{\alpha_q^3 + 10}{1400} \left(\frac{m}{2}\right)^{-1}$. Предполагалось, что для получения членов выше 5-ого, метод эйконала не пригоден. Однако, при $a \neq b$ отличие $\frac{1}{70m}$ незначительно, и другая часть шестого коэффициента играет большую Роль. Кроме того, член, содержащий $(2p+1)^2$, является третьим в разложении η_c , а различие $\frac{1}{70m}$ появляется из четвертого члена разложения ζ_c , что косвенно подтверждает достоверность коэффициента при $(2p+1)^2$.

2.3.3.4 ЕБК для квартики

В работах [28, 29] было предложено обобщение метода для произвольных тел вращения. В случае нулевых граничных условий Дирихле для тела вращения, каустические поверхности будут определяться поверхностями $\rho = g_c(z)$ и ортогональными к ним $\rho = h_c(z)$, которые соответствуют вложенным сфероидам и гиперболоидам вращения. Параметры каустических поверхностей также могут быть определены из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_c} \int_{-z_c}^{z_c} \frac{\sqrt{1+g_c'^2} \sqrt{g_c^2 - \rho_c^2}}{g_c} dz &= \frac{\pi(p+1/2)}{m}, \\ \frac{1}{\rho_c} \int_{z_c}^{z_s} \frac{\sqrt{1+h_c'^2} \sqrt{h_c^2 - \rho_c^2}}{h_c} dz &= \frac{\pi(q-1/4)}{m}, \\ nk_0 \rho_c &= m, \end{aligned} \quad (2.71)$$

где $\rho_c = g_c(z_c) = h_c(z_c)$ — радиус, при котором пересекаются каустические поверхности, а z_s — координата, при которой пересекаются каустическая поверхность $\rho = h_c(z)$ с поверхностью резонатора.

Проблема поиска семейства каустических поверхностей g_c и h_c не является тривиальной в общем случае. Однако, для нахождения интересующего последнего члена разложения, пропорционального $(2p+1)^2$, предположим, что $g_c(z) = a_c \sqrt{1 - z^2/b_c^2 - \mu_c z^4/b_c^4}$. Используя первый интеграл ((2.71)) и подставляя в него $z = z_c \eta_c \sin \psi$, для третьего уравнения при разложении в ряд, аналогичном (2.70), можно получить:

$$\eta_c = \frac{(2p+1)a_c}{b_c m} \left[1 - \frac{a_c(2p+1)(5(\mu_c+1)b_c^2 + a^2)}{8b_c^3 m} \right] + O(1/m^3). \quad (2.72)$$

Стоит отметить, что в отличие от ((2.70)) в уравнении остались параметры a_c и b_c , которые могут быть получены из второго уравнения (2.71). Однако, для упрощения расчета подставим вместо них посчитанные ранее для сфероида. Таким образом, только для последнего члена предполагается, что $a_c \simeq a$, $b_c \simeq b$ и $\mu_c \simeq \mu$ и, подставляя в выражение для собственной частоты $\tilde{y} = ma/\rho_c$, получим:

$$\begin{aligned} nk_0 a &= m - \beta_q \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{(2p+1)a}{2b} + \frac{3\beta_q^2}{20} \left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} - \frac{\beta_q}{12} \frac{(2p+1)a^3}{b^3} \left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} \\ &+ \left(\frac{\beta_q^3}{1400} + \frac{(2p+1)^2 a^2 (b^2(1+3\mu) - a^2)}{32b^4} \right) \left(\frac{m}{2}\right)^{-1} + O(m^{-5/3}), \end{aligned} \quad (2.73)$$

Подставляя $m = \ell - p$ и сравнивая полученный член $\frac{\beta_q^3+10}{1400} \left(\frac{m}{2}\right)^{-1}$ с результатом для сферы,

получим:

$$\begin{aligned} \tilde{y} = nk_0 a \simeq & \ell - \beta_q \left(\frac{\ell}{2}\right)^{1/3} + \frac{2p(a-b) + a}{2b} + \frac{3\beta_q^2}{20} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-1/3} - \frac{\beta_q}{12} \frac{2p(a^3 - b^3) + a^3}{b^3} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3} \\ & + \left(\frac{\beta_q^3 + 10}{1400} + \frac{(2p+1)^2 a^2 (b^2(1+3\mu) - a^2)}{32b^4} \right) \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-1} + O(\ell^{-4/3}). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Для случая с ненулевыми граничными условиями к выражению для собственных частот должны быть добавлены дополнительные члены [27]:

$$\delta y^s = -\frac{Pn}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{\alpha_q}{12} \frac{2n^3 P(2P^2-3)}{(n^2-1)^{3/2}} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3}, \quad (2.75)$$

Для данной аппроксимации в уравнении (2.74) нет проблем, появляющихся в (2.53). Пятый член корректно зависит от ℓ и p . Последний полученный шестой член может быть использован для расчета дисперсии поперечных мод, полученной ранее в [12] в приближении $b/a \rightarrow \infty$, но имеющий правильную форму для случая сферы.

2.3.3.5 ЕБК для тороида

Предположим, каустическая поверхность для тороидального резонатора образована сферами сверху и снизу экваториальной плоскости и вложенным между ними тороидом с параметрами R_c и r_c (2.4):

$$g(z) = R_c - r_c + \sqrt{r_c^2 - z^2} \quad (2.76)$$

$$h(z) = \sqrt{A^2 - (z - B)^2} \quad (2.77)$$

Для каустических поверхностей так же справедливо, что $f = \sqrt{R_c(R_c - 2r_c)}$.

Подставим выражения каустических поверхностей в интеграл (2.68) и заменим выражение $2nk_0$ на $2m$, пользуясь (2.66). Далее по тексту интеграл (2.68) будем называть первым.

$$I_1 = \int_{-z_c}^{z_c} dz \frac{2m \left[(z^2/(r_c^2 - z^2) + 1) \left((\sqrt{r_c^2 - z^2} - r_c + R_c)^2 - (\sqrt{r_c^2 - z_c^2} - r_c + R_c)^2 \right) \right]^{1/2}}{\left(\sqrt{r_c^2 - z^2} - r_c + R_c \right) \left(\sqrt{r_c^2 - z_c^2} - r_c + R_c \right)} \quad (2.78)$$

Сделаем замену переменных $z = z_c \sin(\theta)$ и, так как первый интеграл четная относительно z функция, интегрирование будет производиться не от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а от 0 до $\pi/2$, что упрощает расчет. Для описания каустической поверхности определим 2 малых параметра,

определяющих положение каустической поверхности:

$$z_c = r_c \sqrt{\eta} \quad (2.79)$$

$$R_c = \frac{R}{\sqrt{\xi + 1}}, \quad (2.80)$$

где η и ξ малые параметры. С учетом замен первый интеграл можно представить в виде

$$I_1 = -4\sqrt{\eta} m r_c \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz \quad (2.81)$$

$$\times \frac{\sqrt{\left(\sqrt{-r_c^2(\eta \sin^2(z) - 1) - r_c + r_c}\right)^2 - \left(\sqrt{-(\eta - 1)r_c^2 - r_c + r_c}\right)^2 \cos(\sqrt{\eta} r_c \sin(z))}}{\sqrt{1 - \eta \sin^2(z)} \left(-\sqrt{-(\eta - 1)r_c^2 + r_c - r_c}\right) \left(\sqrt{-r_c^2(\eta \sin^2(z) - 1) - r_c + r_c}\right)}$$

Разложим подынтегральное выражение в ряд по η , проинтегрируем и перенесем константу из правой части (2.68) в левую

$$I_1' = \frac{3\pi\eta^2 m (r_c R_c)^{3/2} (5r_c + 3R_c)}{64R_c^4} + \frac{\pi\eta m (r_c R_c)^{3/2}}{2R_c^3} - 2\pi \left(p + \frac{1}{2}\right) + \dots \quad (2.82)$$

Это выражение должно асимптотически стремиться к нулю. Последовательно подбирая разложение для η так, чтобы выражение (2.82) не зависело от параметра m и было постоянным, получим:

$$\eta = 2\pi(p + 1/2) \frac{R_c^3}{m\pi(r_c R_c)^{3/2}} (1 + a_1 m^{-1} + a_2 m^{-2} + a_3 m^{-3}) + \dots \quad (2.83)$$

Коэффициент $2\pi(p + 1/2) \frac{R_c^3}{m\pi(r_c R_c)^{3/2}}$ выбирался таким образом, чтобы коэффициент при $1/m$ обратился в ноль. Аналогично коэффициент a_1 должен обратиться в ноль при члене порядка $1/m^2$ и так далее. Коэффициенты будем искать для разложения до четвертого порядка по m :

$$\eta = \frac{2(p + \frac{1}{2}) R_c^3}{m(r_c R_c)^{3/2}} - \frac{3(2pR_c + R_c)^2 (5r_c + 3R_c)}{32m^2 r_c^3} + \dots \quad (2.84)$$

Как видно из (2.84), уже при $(R_c/r_c)^{3/2} = 50$ для моды с $m = 50$ малый коэффициент перестает быть малым и становится сравнимым с единицей.

Рассмотрим (2.67) и будем называть это выражение вторым интегралом. После аналогич-

ной замены $2nk_0$ на $2m$ интеграл берется в явном виде:

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{r_c^2 - z_c^2 - r_c + R_c}} 2mA \left(\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{z_p - B}{\sqrt{z_c - z_p} \sqrt{-2B + z_c + z_p}} \right) - \frac{\sqrt{(B - z_c)^2 - A^2}}{A} \operatorname{tanh}^{-1} \left(\frac{(B - z_p) \sqrt{(B - z_c)^2 - A^2}}{A \sqrt{(z_c - z_p)(-2B + z_c + z_p)}} \right) \right) \quad (2.85)$$

но, при дальнейших вычислениях это не очень удобно, так как после интегрирования остаются гиперболические функции и они загромождают расчет. Поэтому этот интеграл, так же как и первый, сначала разложим по малому параметру и только потом проинтегрируем. Из соображений упрощения подынтегральной функции можно перейти к новой переменной интегрирования $\alpha = \frac{h^2 - h_c^2}{h_c^2}$, которая в свою очередь является малой. Сделаем замену координат:

$$\alpha = \frac{h^2 - h_c^2}{h_c^2}, \quad d\alpha = \frac{2hh'}{h_c^2} dz \quad (2.86)$$

$$h = \sqrt{A^2 - (z - B)^2} \quad h' = \frac{-2(z - B)}{2\sqrt{A^2 - (z - B)^2}} = \frac{\sqrt{A^2 - h^2}}{h} \quad (2.87)$$

Подставляя (2.86) и (2.87) во второй интеграл, разлагая в ряд по α и интегрируя получим:

$$I_2' = \frac{2Am\alpha^{3/2}}{3\sqrt{A^2 - h_c^2}} - \frac{Am\alpha^{5/2} (2A^2 - 3h_c^2)}{5(A^2 - h_c^2)^{3/2}} + \frac{Am\alpha^{7/2} (8A^6 - 28A^4h_c^2 + 35A^2h_c^4 - 15h_c^6)}{28(A^2 - h_c^2)^{7/2}} - 2\pi \left(q + \frac{1}{2} \right) \quad (2.88)$$

Подставляя A в виде $\sqrt{B^2 + f^2}$ и сделав замену

$$B = \frac{1}{z_c} \left(r_c^2 + (R_c - r_c) \sqrt{r_c^2 - z_c^2} \right) \quad (2.89)$$

$$z_s = \frac{\sqrt{4f^2r^2 (B^2 + (R - r)^2) + 4B^2r^4 + 2Br^2}}{2(B^2 + (R - r)^2)} \quad (2.90)$$

$$\alpha_s = \frac{h(z_s)^2 - h(z_c)^2}{h(z_c)^2} \quad (2.91)$$

сведем второй интеграл к параметрам тороида и малым коэффициентам η , ξ и α_s :

$$I_2' = \frac{m\alpha_s^{3/2} (1008\eta^2(3\alpha_s + 5) + 6720\eta + 128(105 - 63\alpha_s))}{20160} - 2\pi \left(q + \frac{1}{2} \right) \quad (2.92)$$

Подставляя ξ в виде:

$$\xi = b_0 m^{-\frac{2}{3}} \left(1 + b_1 m^{-\frac{1}{3}} + b_2 m^{-\frac{2}{3}} + \dots \right) \quad (2.93)$$

и обнуляя коэффициенты при соответствующих степенях m , получаем:

$$\xi = \frac{(3\pi)^{2/3}(4q-1)^{2/3}}{2\sqrt[3]{2}} \left(1 + \frac{(3\pi)^{2/3}(4q-1)^{2/3}}{5\sqrt[3]{2}} m^{-2/3} + \dots \right) \quad (2.94)$$

Следуя указаниям [29] и [30], для улучшения точности формулы можно заменить выражение $-(3/2\pi(q-1/4))^{2/3}$ на q ый корень функции Эйри Ai , что позволяет улучшить точность приближения для собственной частоты примерно на 0.1%.

В результате расчета выражение для собственной частоты получено в виде

$$nk_0R = m - \frac{\beta_q b \sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{(2p+1)R}{2\sqrt{rR}} + \frac{3\beta_q^2}{102^{2/3} \sqrt[3]{m}} - \frac{5\beta_q(2p+1)R^{3/2}}{12\sqrt[3]{2}m^{2/3}r^{3/2}} + \frac{175(2p+1)^2R(r-R) + 16\beta_q^3r^2}{11200mr^2} \quad (2.95)$$

Для того, чтобы сравнить полученное приближение для тороида и сфероида, произведем замену:

$$R = a, \quad b = \sqrt{(Rr)}, \quad \mu = \frac{R-r}{4r} \quad (2.96)$$

Легко заметить, что собственные частоты незначительно различаются лишь в последнем члене, определяющем дисперсию поперечных мод.

Беря вторую производную собственной частоты (2.95) получим:

$$\frac{\partial^2(nk_0R)}{\partial p^2} = \frac{R\beta_q(9r^2 + 9rR - 35R^2)}{72\sqrt[3]{2}m^{5/3}r^3} + \frac{R(r-R)}{8mr^2} \quad (2.97)$$

Знак второй производной можно подобрать, варьируя параметры r , R и m , что позволяет получить семейство форм с заданным уровнем дисперсии.

2.3.4 Распределение поля в сфероидальных резонаторах

Амплитуда поля в резонаторе в первом приближении может быть легко найдена из уравнения переноса [24]. Сфероидальные функции:

$$\begin{aligned} R(\xi, c) &\simeq \frac{C_\xi}{[(\lambda - c^2\xi^2)(\xi^2 - s) + sm^2]^{1/4}} e^{ik_0S} + c.c., \\ S(\eta, c) &\simeq \frac{C_\eta}{[(1 - \eta^2)(\lambda - sc^2\eta^2) - m^2]^{1/4}} e^{ik_0S} + c.c., \\ \lambda &= c^2(\xi_c^2 - s + s\eta_c^2). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Аналогичные выражения для сферы или цилиндра приводят к известным приближениям Дебая, использовавшимся ранее (2.30). Более простое приближение может быть получено,

если распределение поля адиабатически приближается к поверхности резонатора аналогично распределению в цилиндре:

$$\begin{aligned}
E_\chi &\simeq E_0 e^{-\frac{z^2}{2b^2} \sqrt{m^2 b^2 / a^2 - 1/4}} J_m \left(T_{mq} \frac{\rho}{\bar{a}} \right) e^{im\phi}, \quad (\rho < a) \\
E_\chi &\simeq C E_0 e^{-\frac{z^2}{2b^2} \sqrt{m^2 b^2 / a^2 - 1/4}} H_m^{(1)} \left(\sqrt{\frac{T_{mq}^2}{n^2 a^2} + \frac{m(n^2 - 1)}{n^2 ab}} \rho \right) e^{im\phi} \\
&\simeq \frac{1}{P} E_0 e^{-\frac{z^2}{2b^2} \sqrt{m^2 b^2 / a^2 - 1/4}} J_m \left(T_{mq} \frac{a}{\bar{a}} \right) e^{im\phi} e^{-\alpha(\rho - a)}, \quad (\rho > a),
\end{aligned} \tag{2.99}$$

где $\bar{a} = a + \frac{P}{k_0 \sqrt{n^2 - 1}}$ – эффективный радиус, $\gamma = \sqrt{n^2 - 1} k_0$, $\chi = z$ для ТЕ и $\chi = \rho$ для ТМ мод. Для мод с $p \neq 1$ для зависимости от координаты z воспользуемся функциями Гауса-Эрмита вместо простой Гусовой зависимости [29]:

$$\begin{aligned}
&\propto e^{-\tilde{\theta}^2} H_p(\tilde{\theta}), \\
\tilde{\theta} &\simeq \frac{z}{r} \left(\frac{m^3 r^3}{a^3} - \frac{r^2}{2a^2} \right)^{1/4}, \\
r &= b^2 / a.
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Проинтегрировав распределение поля внутри резонатора по объему, можно получить энергию поля в нем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{\epsilon_0 n^2}{2} 2\pi \int_0^{\bar{a}} \int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 \rho d\rho dz \\
&\simeq \frac{\epsilon_0 n^2}{2} E_0^2 2\pi \frac{\sqrt{\pi ab} \bar{a}^2}{\sqrt{m}} \frac{J_m'^2(T_{m1})}{2},
\end{aligned} \tag{2.101}$$

и эффективный объем:

$$V_{eff} = \frac{\int n^2 |E|^2 dV}{\max(n^2 |E|^2)} \simeq \pi^{3/2} \frac{a^2 \sqrt{ab} J_m'^2(T_{m1})}{\sqrt{m} J_m^2(T_{m1})}, \tag{2.102}$$

где $E_{max} = E_0 J_m(T_{m1})$, T_{m1}' – первый корень производной функции Бесселя. Используя приближенные выражения для корней Бесселя получим:

$$\begin{aligned}
V_{eff} &\simeq 15.12 a^2 \sqrt{ab} m^{-7/6} \\
&\simeq 15.12 a^{11/4} r_t^{1/4} m^{-7/6}
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Также можно упростить вид поля, предполагая, что радиальная часть поля имеет Гаусову

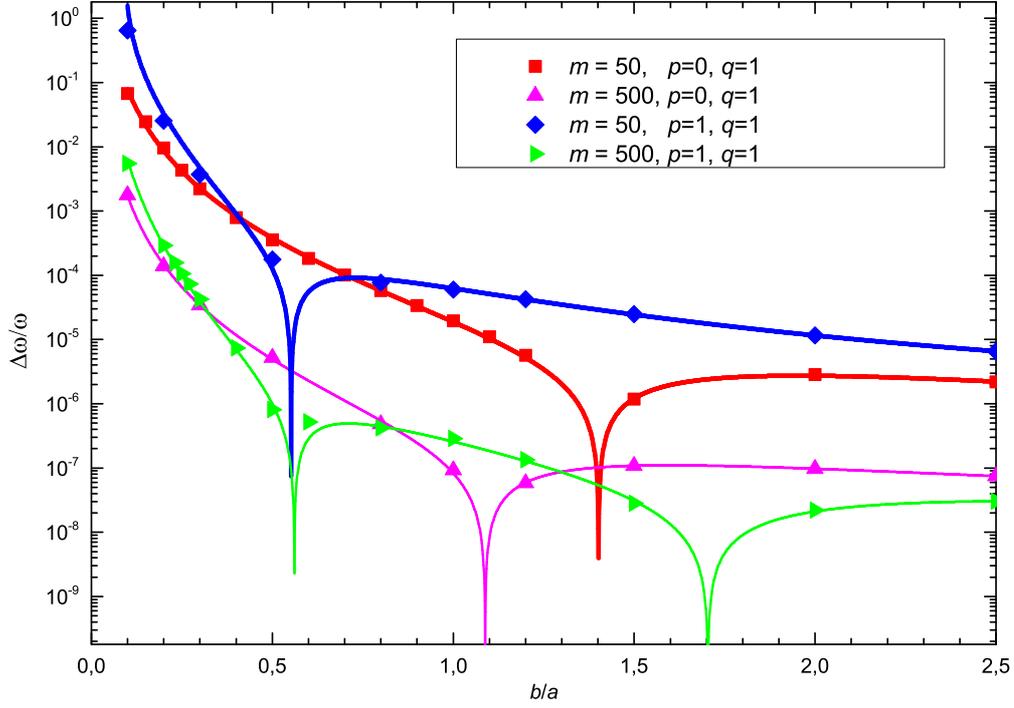


Рис. 2.6: Относительная точность приближения для собственных частот (2.74)

огнибающую:

$$E \simeq \exp \left[-\frac{(r - a_m)^2}{2r_r^2} - \frac{z^2}{2r_z^2} + im\phi \right], \quad (2.104)$$

$$r_z = \sqrt{\frac{ab}{m}}, \quad r_r = 0.77am^{-2/3}, \quad a_m = \frac{T'_{m1}\lambda}{2\pi n}.$$

2.3.5 Численные проверки

Аналитические результаты для собственных частот (2.74) достаточно хорошо соответствуют результатам численного моделирования методом конечных элементов (2.6). Негладкость этих графиков вызвана в первую очередь переходом графиков через ноль и также недостаточной точностью численного моделирования. Как хорошо видно из графиков, приближение дает хорошие результаты для вытянутых сфероидов, а для сплюснутых сфероидов при $a/b > m^{1/3}$ становится мало пригодным. Причина этого в том, что для сильно сплюснутых сфероидов поле перестает быть сконцентрированным вблизи экватора. Как таковая каустическая поверхность распадается на две, выше и ниже экваториальной плоскости, что противоречит приближениям, сделанным при получении приближений.

Таблица 2.1:

μ	$y_{\ell 0q}(\text{num})$	$y_{\ell 0q}((2.105))$	$d_1(\text{num})$	$d_1((2.105))$	$d_2(\text{num})$	$d_2((2.105))$
-1/3	109.087968	109.088279	-0.5259 ± 0.0006	-0.5253	$(-4.6 \pm 0.6) \times 10^{-4}$	-3.1×10^{-4}
-1/4	109.088042	109.088279	-0.5250 ± 0.0002	-0.5251	$(-1.4 \pm 0.1) \times 10^{-4}$	0
0	109.088266	109.088279	-0.5222 ± 0.0011	-0.5247	$(8.1 \pm 0.2) \times 10^{-4}$	9.4×10^{-4}
1/3	109.088568	109.088279	-0.5184 ± 0.0030	-0.5240	$(21.2 \pm 0.7) \times 10^{-4}$	22×10^{-4}

Для проверки нового члена разложения в приближении для собственных частот сравним аналитически полученное выражение для дисперсии с численным расчетом.

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{\ell pq} &\simeq \frac{na}{c} \omega_{\ell pq} = \tilde{y}_{\ell 0q} + d_1 p + \frac{1}{2} d_2 p^2, \\
d_1 &\simeq \frac{a-b}{b} - \alpha_q \frac{a^3 - b^3}{6b^3} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3} + \frac{a^2(b^2(1+3\mu) - a^2)}{4b^4} \ell^{-1}, \\
d_2 &= \tilde{y}_{p+1} + \tilde{y}_{p-1} - 2\tilde{y}_p \simeq \frac{a^2(b^2(1+3\mu) - a^2)}{2b^4} \ell^{-1}. \tag{2.105}
\end{aligned}$$

Сравнение проводилось с численным моделированием скалярного уравнения Гельмгольца методом конечных элементов в пакете *Comsol Multiphysics*. $p_0 = (0, \frac{3-4\mu}{2\sqrt{2}}b)$, $p_1 = (\frac{4}{3}a, \frac{12\mu+7}{6\sqrt{2}}b)$, $p_2 = (\frac{4}{3}a, -\frac{12\mu+7}{6\sqrt{2}}b)$, $p_3 = (0, -\frac{3-4\mu}{2\sqrt{2}}b)$.

Результаты моделирования для $m = 100$, $q = 1$, $a : b = 1 : 2$, $p = 0.5$ показаны в таблице (2.3.5). Полученные аналитически значения дисперсии сравнивались с результатами численного моделирования полного векторного уравнения в *Comsol Multiphysics* для диэлектрического резонатора. Точность аналитических приближений получена с поправкой на изменение эффективного радиуса резонатора за счет выпадения поля. Также было показано, что при $\mu = (a^2 - b^2)/(3\mu) = -1/4$ дисперсия снижается до 20 раз при $m = 500$, что открывает возможности для оптимизации формы резонатора для получения нужного уровня дисперсии.

2.3.6 Интерполяция ошибок

Для улучшения точности приближения была аппроксимирована ошибка, возникающая при сравнении приближения (2.74) с рассчитанными значениями собственных частот с помощью программы *Comsol Multiphysics*. Получая равномерную по l аппроксимацию, необходимо построить такую аппроксимацию, чтобы точность для сильно вытянутых резонаторов не ухудшилась. Чтобы этого достичь, необходимо ввести для аппроксимации некоторую весовую функцию. Весовая функция выбиралась таким образом, чтобы она быстро возрастала с увеличением вытянутости сфероида, при этом относительная погрешность стандартной аппроксимации для вытянутых сфероидов уменьшается. Анализ показал, что функция $g(b/a) = (b/a)^4$ дает хорошие результаты.

На графиках (2.7) для иллюстрации представлена ошибка, умноженная на весовую функ-

цию, аппроксимированная многочленом

$$\Delta(b/a) = \sum_{i=1}^4 c_i \left(\frac{b}{a}\right)^i \quad (2.106)$$

Как видно из графиков (2.7), выбранный способ аппроксимации многочленом по b/a в виде (2.106) дает правдоподобный результат. После аппроксимации ошибок для каждой моды в

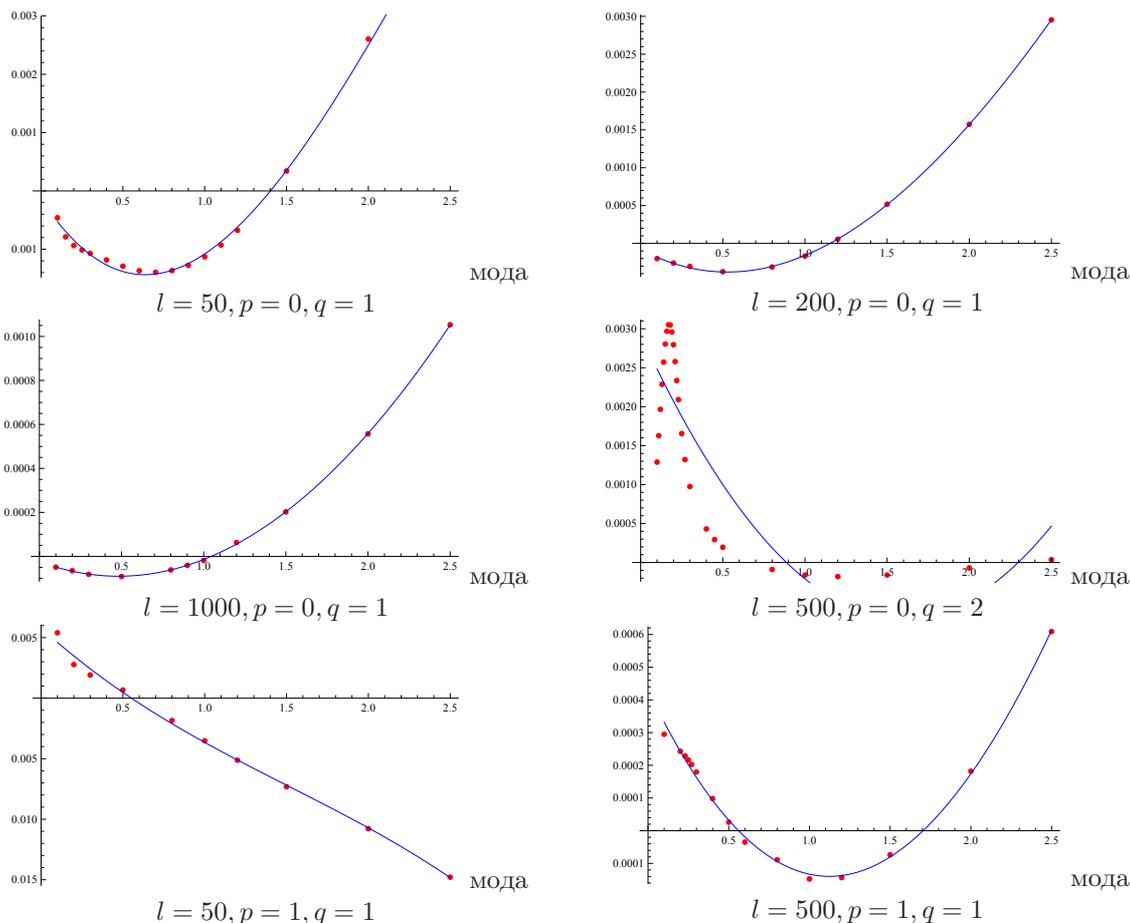


Рис. 2.7: Аппроксимация различных мод с различными параметрами. Сплошная синяя линия — интерполяция, красные точки — численный расчет.

отдельности, построим аппроксимацию для коэффициентов разложения c_i для мод с одинаковыми p и q в зависимости от индекса моды l . На графике (2.8) приведены аппроксимации четырех коэффициентов для мод с индексами $p = 0, q = 1$: Для мод с $p = 0$ и $q = 1$ удалось построить формулу для различных l (то есть равномерную аппроксимацию), которая дает

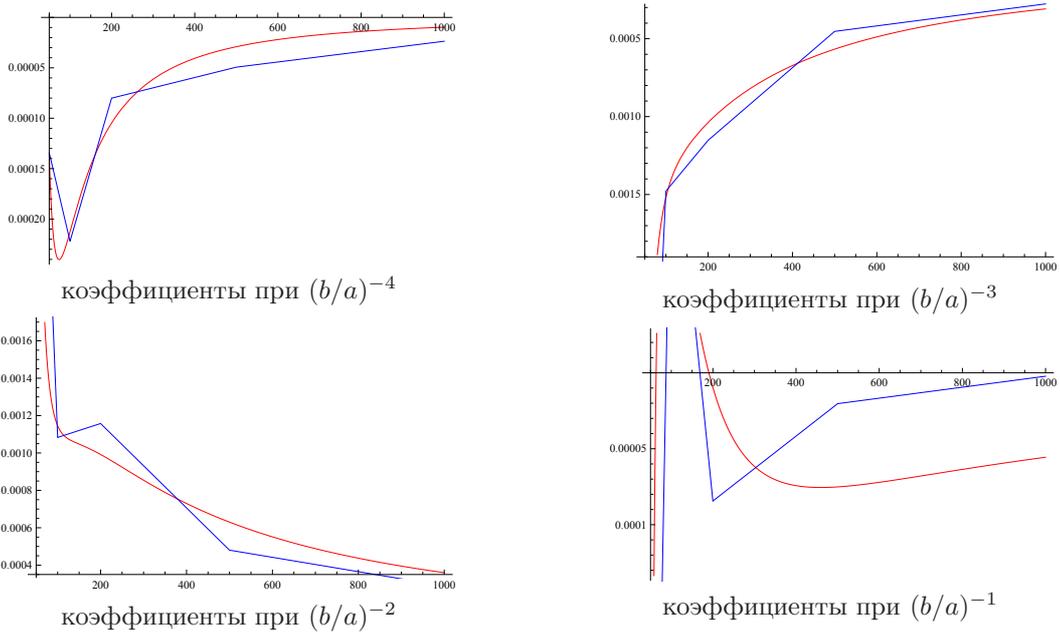


Рис. 2.8: Аппроксимация коэффициентов мод с $p = 0, q = 1$. Сплошная синяя линия — интерполяция, красные точки — численный расчет.

увеличение точности:

$$\Delta = \frac{0.07241}{m^{4/3}} - \frac{2.47}{m^{5/3}} + \frac{7.779}{l^2} + \frac{-7.947}{l^{4/3}} + \frac{61.56}{l^{5/3}} - \frac{129.7}{l^2} + \frac{10.02}{l^{4/3}} - \frac{81.69}{l^{5/3}} + \frac{174.8}{l^2} + \frac{-2.178}{l^{4/3}} + \frac{21.22}{l^{5/3}} - \frac{49.99}{l^2} \quad (2.107)$$

Эту же формулу можно представить в виде таблицы:

.	$(b/a)^{-1}$	$(b/a)^{-2}$	$(b/a)^{-3}$	$(b/a)^{-4}$
$l^{-4/3}$	-2.178	10.02	-7.9471	0.07241
$l^{-5/3}$	21.22	-81.69	61.56	-2.47
$l^{-6/3}$	-49.99	174.8	-129.7	7.779

Как видно из графика (2.9), точность приближения после аппроксимации для моды $p = 0$ и $q = 1$ возросла примерно на порядок.

Для мод $p = 1$ и $q = 1$ получить равномерную аппроксимацию не удалось — она не дает улучшения точности, а наоборот ухудшает точность результата примерно на порядок.

Для мод $p = 0$ и $q = 2$ равномерную аппроксимацию не удалось построить, а удалось аппроксимировать только отдельные моды. В отличие от ошибки для фундаментальной моды и моды с индексами $p = 1$ и $q = 1$, которая имеет два максимума в плоскости, перпендикулярной экваториальной, ошибка для моды $p = 0$ и $q = 2$ не описывается монотонной функцией. Это может быть связано с достижением предела точности для формулы (2.74), то есть даже

при учете следующих малых членов ряда, убрать достаточно сильную немонотонность не получится. Так же была сделана аппроксимация многочленом

$$\Delta(b/a) = \sum_{i=1}^5 a_i \left(\frac{b}{a}\right)^i \quad (2.108)$$

При такой аппроксимации ошибки для больших сплюснутостей у фундаментальной моды точность немного улучшается по сравнению и аппроксимацией 4-ого порядка. Перейдем к выражению не для l , а для $l/2$ и получим для фундаментальной моды:

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{-\frac{0.286804}{(l/2)^{4/3}} + \frac{1.72891}{(l/2)^{5/3}} - \frac{2.78197}{l^2}}{(b/a)^4} + \frac{-\frac{0.806069}{(l/2)^{4/3}} + \frac{0.752366}{(l/2)^{5/3}} + \frac{2.6708}{(l/2)^2}}{(b/a)^3} \\ & + \frac{-\frac{0.130563}{(l/2)^{4/3}} + \frac{6.88115}{(l/2)^{5/3}} - \frac{17.7603}{(l/2)^2}}{(b/a)^2} + \frac{\frac{1.63581}{(l/2)^{4/3}} - \frac{13.184}{(l/2)^{5/3}} + \frac{24.9721}{(l/2)^2}}{(b/a)} \\ & - \frac{0.486759}{(l/2)^{4/3}} + \frac{3.86993}{(l/2)^{5/3}} - \frac{7.30341}{(l/2)^2} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Запишем полученные коэффициенты в виде таблицы

.	$(b/a)^0$	$(b/a)^{-1}$	$(b/a)^{-2}$	$(b/a)^{-3}$	$(b/a)^{-4}$
$(l/2)^{-4/3}$	-0.486759	1.63581	-0.130563	-0.806069	-0.286804
$(l/2)^{-5/3}$	3.86993	-13.184	6.88115	0.752366	1.72891
$(l/2)^{-6/3}$	-7.30341	24.9721	-17.7603	2.6708	-2.78197

Аппроксимация пятым порядком дает близкие результаты по сравнению с аппроксимацией четвертым порядком, но при больших сплюснутостях результат с аппроксимацией 5-ого порядка получается немного лучше:

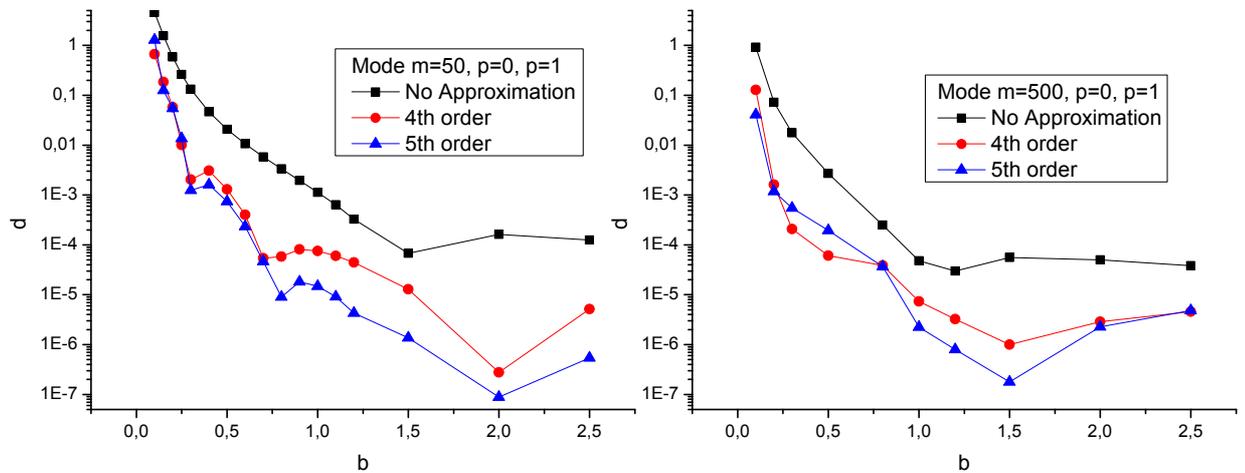


Рис. 2.9: Относительная ошибка до и после аппроксимации

В результате было показано, что для фундаментальных мод удается построить равномерную по l аппроксимацию, дающую прирост в точности около порядка. При этом для нефундаментальных мод равномерной аппроксимации найдено не было. Это косвенно означает, что рассмотренные методы не дадут дальнейшего увеличения точности при увеличении числа членов.

2.4 Заключение

В результате работы с помощью метода эйконала было получено наиболее точное на сегодняшний день приближение для собственных частот сфероидов, тороидов и квартик. Это приближение содержит достаточное количество членов разложения для вычисления дисперсии поперечных мод, которая хорошо согласуется с результатами численного моделирования. К сожалению, по сравнению с предыдущим результатом приближение для собственных частот не дает значительного увеличения точности для сильно сплюснутых резонаторов. Также для сфероидальных резонаторов были получены приближения для распределения поля, его энергии и эффективного объема моды. Была получена равномерная аппроксимация ошибки приближения для фундаментальных мод сфероида и квартики, которая позволяет на порядок улучшить точность. Также была показана возможность хорошей аппроксимации ошибок приближения для мод с $p = 1, q = 1$.

Эти результаты опубликованы в [A1], [130].

Глава 3

Применение оптических микрорезонаторов с МШГ в качестве высокочувствительных сенсоров

3.1 Обзор литературы

Задача детектирования химических и биологических веществ в растворах и в воздухе является важной и актуальной не один десяток лет. Современные методы, позволяющие определить очень малые количества биомассы основаны на создании благоприятных условий для развития микроорганизмов и увеличения их численности до количеств, достаточных для детектирования. К сожалению, такие методы требуют как длительного времени, иногда до нескольких дней, необходимого для роста численности микроорганизмов, так и дорогостоящего труда специалистов лаборатории. Кроме того в пищевой, военной и многих других областях также требуются селективные сенсоры, способные быстро выявить присутствие определенных веществ.

На текущий момент самыми перспективными являются оптические биосенсоры. Они обладают более высокой чувствительностью и быстродействием по сравнению с другими типами датчиков. В отличие от химических методов, использование оптических сенсоров позволяет при значительно меньших размерах устройств обеспечить меньшее время детектирования и большую чувствительность.

Биосенсоры можно разделить на две большие группы, к одной из которых будут относиться

детекторы с использованием маячков, работающие на основе флюоресценции при взаимодействии измеряемых частиц с детектором, к другой относятся сенсоры, работающие с чистыми, не измененными детектируемыми частицами, которые работают за счет измерения косвенных показателей, таких как изменение показателя преломления, Рамановское рассеяние и поглощение. Детектирование чистого вещества обладает меньшей чувствительностью, зато позволяет работать с меньшими объемами препаратов.

В дальнейшем будем рассматривать подробнее сенсоры на основе измерения показателя преломления. Все эти сенсоры имеют общий принцип работы: чувствительная область покрыта некоторым веществом-распознавателем, а объем сенсорной области заполнен буферным веществом. При попадании в чувствительную область детектируемой частицы, она садится на акцепторы, замещая буферное вещество на расстоянии от нескольких нанометров до нескольких десятков нанометров от поверхности, изменяя таким образом свойства поверхности сенсора, точнее ее показатель преломления, что и отображается в выходном сигнале. В большинстве сенсоров световое поле сконцентрировано в приповерхностном слое, и его выпадающее поле имеет характерную длину спада от нескольких десятков до нескольких сотен нанометров, что и определяет область, в которой будут видны детектируемые прореагировавшие частицы.

Одним из ключевых понятий для сенсоров является их чувствительность, которая определяется степенью изменения выходного сигнала при изменении состава вещества в сенсорной области. Во всех датчиках на основе выпадающего поля она определяется интенсивностью поля в приграничной области, то есть силой взаимодействия между светом и веществом. Но чаще для сравнения работы сенсоров приводят их предел измерения, определяемый отношением минимально разрешимого сигнала к чувствительности. Поскольку мы рассматриваем сенсоры на основе изменения показателя преломления, то предел измерения указывается в единицах показателя преломления, но его можно задавать и в по отношению к массе ($\text{пгр} / \text{мм}^2$) или по отношению к концентрации ($\text{нгр} / \text{мл}$). Улучшить предел измерений можно за счет:

- увеличения области взаимодействия свет-вещество
- уменьшения температурных флуктуаций (используя термостат)
- использования взаимной компенсации термо-оптического и термо-механического эффекта (разные знаки коэффициентов)

Существует несколько основных видов оптических сенсоров, использующих изменение показателя преломления для получения сигнала.

3.1.1 Сенсоры на эффекте поверхностного плазмонного резонанса

Наиболее часто встречающимся является датчик, построенный на эффекте поверхностного плазмонного резонанса [31–35]. Поверхностная плазмонная волна - колебание зарядовой плотности, которое происходит на поверхности соприкосновения двух веществ с диэлектрическими константами противоположных знаков (металл/диэлектрик). Такие волны распространяются в направлении, параллельном границе раздела металл – диэлектрик, и сильно локализованы у границы раздела сред. В результате они оказываются весьма чувствительными к любым изменениям граничных условий на поверхности металла, что позволяет использовать их для детектирования сверхмалых концентраций различных биохимических соединений. Для возбуждения поверхностного плазмона на границе металл – диэлектрик должно выполняться согласование проекции волнового вектора падающего излучения параллельной границе раздела и волнового вектора поверхностного плазмона. Другими словами, энергия фотона переходит в плазмонную волну при резонансной длине волны или резонансном угле падения.

Существует четыре основных согласовывающих устройств для возбуждения плазмонной волны: призма [36], волновод [37], оптоволокно [38] или субволновая решетка [39,40]. Связь через призму является наиболее удобной конфигурацией и дает наилучший предел измерений, но за счет больших размеров такая связь плохо интегрируется. В этом смысле использование волновода или оптоволокна намного удобнее. В случае использования оптоволокна снимается небольшой участок оболочки и покрывается слоем металла. Существует несколько различных конфигураций биосенсоров, основанных на оптоволокне: односторонне полированное одномодовое волокно [41, 42], односторонне полированное многомодовое волокно [43], волокно с сохранением поляризации [44] и "D-shaped" волокно [45].

Однако, у сенсоров на основе плазмонного резонанса есть несколько особенностей. Первая заключается в небольшой глубине проникновения выпадающего поля, составляющей десятки нанометров, в результате чего детектирование происходит только в тонком приповерхностном слое. С одной стороны это позволяет реализовать высокую чувствительность и селективность и существенно уменьшить паразитный фоновый сигнал, но с другой стороны не позволяет детектировать большие соединения, например клетки или бактерии. Вторая особенность в том, что одна плазмонная волна не позволяет разделить информацию об изменении показателя преломления на поверхности и в общем объеме. Для избежания этих проблем разработан дизайн с использованием одновременно двух чувствительных областей разной длины [46–50].

3.1.2 Сенсоры на интерферометрах

Следующий класс сенсоров построен на базе интерферометров. В отличие от биосенсора, основанного на принципе поверхностного плазмонного резонанса, биосенсор на основе интерферометра чувствителен к изменениям коэффициента преломления по всему объему ячейки.

3.1.2.1 Интерферометр Маха-Цандера

В данных сенсорах реализована схема интерферометра Маха-Цандера при помощи оптоволоконна. Одно из плеч интерферометра взаимодействует с веществом, второе — изолировано. В результате изменения показателя преломления одного из плеч в выходном сигнале появляется разность фаз, приводящая к изменению интенсивности на фотодетекторе. Для уменьшения фоновых шумов опорное плечо интерферометра также погружают в буферное вещество. Один способ улучшить чувствительность данного сенсора - увеличить размер центральной жилы волноводов без потери одномодовости, что достигается при использовании антирезонансного отражающего оптического волновода.

3.1.2.2 Интерферометр Юнга

Следующий вариант использования интерферометров представляет из себя схему Юнга. В отличие от схемы с интерферометром Маха-Цандера, выходы обоих плеч не соединяются, а независимо приходят на детектор (сссd-камеру) и образуют на экране интерференционную картину. Таким образом в качестве выходного сигнала выступает пространственное распределение интенсивности на экране. При сдвиге фазы сигнала из основного канала происходит смещение интерференционной картины. Данная схема позволяет детектировать несколько веществ одновременно, для чего необходимо добавить дополнительные плечи, каждое из которых будет взаимодействовать со своей частицей [51]. За счет того, что расстояние между каждым из основных плеч и опорным плечом разное, общий сигнал можно разделить с помощью фурье-анализа.

На основе интерферометра Юнга существует коммерческий продукт AnaLight® от компании Fairfield Scientific [52].

3.1.2.3 Интерферометр Хартмана

Еще одна очень похожая конфигурация использует интерферометр Хартмана [53]. Она представляет из себя планарный волновод, на котором при помощи фотолитографии выделено множество параллельных детектирующих каналов. Одиночные волны линейно-поляризованного света от диодного лазера вводятся в волновод при помощи дифракционных решеток, превращаясь в широкий пучок, охватывающий все каналы детектора. На выходе при помощи

дифракционной решетки и других интегральных элементов сигналы из каналов попарно соединяются, образуя независимые интерферометры.

3.1.2.4 Обратное рассеяние

Следующий класс сенсоров использует интерференцию при обратном рассеянии [54]. Как правило, такие сенсоры состоят из некоторой отражающей подложки, на которую может наноситься или каким-либо образом пропускаться по ней исследуемый образец. Одномодовый когерентный лазер сфокусирован на небольшую область этой подложки и в его поле зрения находится лишь малая часть образца. Лазер сканирует всю поверхность образца так, что в каждый момент отраженный сигнал попадает на детектор, измеряющий интенсивность. Наличие субволновых частиц на сканируемой поверхности приводит к интерференции на детекторе.

Одной из реализаций является биологический компакт-диск [55, 56]. В данном случае в качестве подложки выступает диск. На него наносится препарат, который после высыхания сканируется лазером, как это делается с обычным cd-диск. В процессе такого считывания на краях больших молекул-рецепторов появляется интерференция. Очевидно, что интерференционная картина до и после добавления препарата будет различной. Биодиск (BioCD) является коммерческим продуктом компании QuadraSpec [57].

Еще одно применение эффекта обратного рассеяния было продемонстрировано Марковым [58]. В данной работе использовался проточный прямоугольный капилляр, стенки которого покрывались молекулами-распознавателями, и освещался сверху лазером. Интерференционный сигнал детектировался лавинным фотодетектором. Результаты были получены также и для круглого капилляра. Такая схема позволила осуществить детектирование биомолекулярных реакций в свободном пространстве в отличие от ранее только поверхностных.

3.1.3 Сенсоры на оптических волноводах

К этой группе относятся сенсоры не просто имеющие в своем составе волновод, но немного отличающиеся от уже упомянутых по принципу действия.

3.1.3.1 Резонансное зеркало

Датчик на основе резонансного зеркала представляет из себя слоистую структуру: волноводный слой с большим показателем преломления и субстрат (призма) с большим показателем преломления разделены металлическим слоем или диэлектриком с малыми потерями и с малым коэффициентом отражения [59]. При падении света под резонансным углом достигается связь с волноводом и появляется отраженный свет на выходе. Выпадающее поле волново-

да чувствительно к осажденному на его поверхности веществу, в результате чего меняется резонансный угол. Подобная конструкция отличается достаточно большим выпадающим полем, что позволяет использовать ее для детектирования клеток, размер которых достигает нескольких микрон. В отличие от плазмонного резонанса, который работает только на ТМ-моды, резонансное зеркало использует ТЕ и ТМ моды, которые имеют разные резонансные углы. На основе этой конфигурации также создан коммерческий продукт компанией NeoSensors.

Сенсоры на основе резонансного зеркала, хотя и выигрывают у сенсоров на основе плазмонного резонанса по простоте и удобству использования, но оказываются дороже и сложнее в производстве. Для решения этой проблемы существует гибридная конструкция, сочетающая в себе плюсы волноводного датчика с простотой изготовления плазмонно-резонансных сенсоров. Она представляет из себя слой диэлектрика с малым показателем преломления, разграниченный с призмой тонкой металлической пленкой. Диэлектрик в данном случае выступает в качестве волновода с выпадающим полем, а металлическая прослойка позволяет ввести больше света в волновод, в результате чего чувствительность такой схемы оказывается намного выше за счет большего выпадающего поля [60–62]. Это позволяет детектировать достаточно большие объекты, такие как клетки [60, 61, 63, 64].

3.1.4 Сенсоры на основе оптоволокна

Использование оптоволокна для создания сенсоров оказывается очень перспективным, так как оно не только дешево и просто в изготовлении, но и удобно в использовании [65, 66].

3.1.4.1 Брэгговские решетки в волокне

Одной из самых популярных конструкций является Брэгговская решетка [67]. Такой датчик представляет из себя волокно, в центральной жиле которого создана периодическая структура показателя преломления. Эта структура, или Брэгговская решетка, создается при освещении волокна в направлении перпендикулярном его оси двумя пересекающимися сфокусированными лазерными пучками ультрафиолетового диапазона. Интерференционная картина этих пучков и записывается в участок волокна периодическую структуру показателя преломления, которая работает как фильтр-пробка и отражает свет только с Брэгговской длиной волны [68]. Существует немало вариантов связи с выпадающим полем Брэгговской решетки, что достаточно не просто и является отдельной задачей [69–72].

Большой популярностью пользуется дизайн, при котором можно избежать необходимости связываться непосредственно с основной жилой волокна и схема достаточно чувствительна к изменениям на поверхности [73]. Это достигается при больших периодах Брэгговской ре-

шетки, порядка 100 мкм -1 мм. Хотя чувствительность такой конструкции достаточно мала.

3.1.4.2 Нановолокно

Это кварцевое волокно, вытянутое при нагревании до диаметра менее 1мкм. Нановолокно имеет большое выпадающее поле в связи со своими размерами и чувствительно к изменению показателя преломления. Оно не является новым типом сенсора, а скорее служит для улучшения уже известных сенсоров [74–76].

3.1.5 Фотонный кристалл

Совершенно другой класс биосенсоров использует фотонные кристаллы, хотя сам принцип действия остается прежним [77–90]. Фотонный кристалл - это периодическая структура, пропускающая через себя определенные длины волн (как и фильтр пробка). Наличие дефекта, который чаще всего реализуют в качестве большого отверстия в центре, приводит к появлению дефектной моды в закрытом диапазоне частот, а изменение дефекта, выражающееся в осаждении на поверхность аналита, приводит к изменению выходного спектра. Существует множество конфигураций этого типа датчиков. Стоит отметить, что их общим достоинством являются малые размеры и расход препарата.

3.1.6 Сенсоры на микрорезонаторах с модами шепчущей галереи

Принцип работы этого типа сенсоров основан на чувствительности выпадающего поля к изменению показателя преломления среды при осаждении детектируемого вещества. Остановимся на них более подробно.

3.1.6.1 Отражение на границе раздела

При полном внутреннем отражении поле выходит за границу раздела сред, на которой происходит отражение, но при этом коэффициент отражения на поверхности остается равным единице. При углах, больших полного внутреннего отражения, угол падения становится комплексным, что приводит к появлению мнимой части у волнового вектора, направленной перпендикулярно поверхности, что соответствует экспоненциально спадающей волне снаружи поверхности, на которой происходит отражение. Характерная глубина, на которую проникает поле определяется по формуле:

$$\sigma \approx k_0^{-1} (c_0(n_1, n_2) + c_2(n_1, n_2) \cos^2(\phi) + \dots), \quad (3.1)$$

где $c_0(n_1, n_2)$ и $c_2(n_1, n_2)$ положительные постоянные, зависящие от показателей преломления и ϕ угол падения на поверхность. Эффективный набег фазы при отражении от поверхности будет зависеть как от показателя преломления наружной среды, так и от угла, под которым от поверхности отражается волна. Этот эффект также известен как эффект Гуса-Хенхена [91]. Именно выпадающее поле дает возможность детектировать соединения на поверхности раздела.

3.1.6.2 Основные типы детекторов

Типов сенсоров, использующих оптические микрорезонаторы с модами типа шепчущей галереи, достаточно много. Все они так или иначе связаны с тем, что добротность микрорезонаторов может достигать огромных, вплоть до 10^{11} , значений [2], что позволяет достичь большой чувствительности. Так как для практических приложений очень важен как размер устройства и возможность его интеграции на чипе, так и его чувствительность, то в каждом конкретном случае выбирается свой подход к конструированию сенсора. Более чувствительные детекторы, обычно, обладают более сложной и громоздкой структурой.

Наиболее простые детекторы измеряют сдвиг резонансной частоты, вызванный изменением эффективного показателя преломления из-за появления на поверхности резонатора слоя вещества, обладающего диэлектрическими свойствами. Для такой схемы измерений, обычно, достаточно иметь микрорезонатор в ячейке, на который осаждается детектируемое вещество, и элемент связи с ним. При этом форма резонатора может быть различной, например, шарики [92], [93], диски [94] или тороиды [95] и так далее. Работ на эту тему сейчас достаточно много [96].

Кратко рассмотрим некоторые из них.

В 2002 году в работе [97] детектировались протеины на поверхности микрорезонатора, причем измерялся сдвиг собственной частоты резонатора. В эксперименте использовался сфероид размером около 300 мкм., получившийся на кончике одномодового оптического волокна в пламени горелки и обработанный 3-аминопропилтриметоксисиланом для придания ему гидрофобных свойств. Добротность микрорезонатора получилась около 2×10^6 . Микрорезонатор помещался в ячейку с раствором детектируемого вещества. Сканирование осуществлялось перестраиваемым полупроводниковым лазером и после прохождения через микрорезонатор усиливалось и попадало на детектор. Измерение чувствительности детектора проводилось на молекуле бычьего сывороточного альбумина (БСА). Изменение концентрации БСА показало, что при пороговом значении, соответствующем одному монослою вещества, молекулы перестают оседать на резонатор. После этого были проведены измерения на альбумине человека, структура которого очень похожа на БСА. Экспериментально установлено, что минимальная концентрация, которую можно детектировать, это 0.01 мг/М, а минималь-

ная масса детектируемых молекул должна быть не меньше 50 г/М.

Более современные эксперименты обладают значительно большей точностью. В экспериментах 2014 [98] года уже получается детектировать появление одной молекулы на поверхности резонатора. Резонатор для этого эксперимента изготавливался с помощью мощного CO_2 лазера, расплавляющего конец оптического волокна. Резонатор получается меньшего размера (80 мкм.) и с добротностью также около 10^6 . В этом эксперименте удается детектировать сдвиг частоты с точностью до 1/1000 ширины линии, благодаря компьютерной обработке. В эксперименте детектируется вирус, размер которого достигает 100nm . Более мелкие вирусы детектировать с помощью измерения сдвига резонансной частоты не получается.

3.1.6.3 Методы улучшения чувствительности

Для увеличения чувствительности сенсора можно, в частности, увеличивать добротность микрорезонатора. При этом уменьшается ширина линии, что дает возможность измерять более малые сдвиги частоты.

Например, в работе [99] детектируется наличие небольшого количества (0.0001%) тяжелой воды D_2O в обычной воде. Это оказывается возможным благодаря тому, что в диапазоне 1300 нм. добротность резонатора в обычной воде (10^6) на порядок ниже, чем в тяжелой.

В 2003 году для измерения молекул ДНК был предложен метод [100], который использовал одновременно 2 микрорезонатора с разными покрытиями. Этот метод позволяет различать молекулы ДНК, отличающиеся на один нуклеотид, с соотношением сигнал шум равным 54.

Однако, очень высокая добротность резонатора значительно усложняет спектр, появляется очень много мод, и наблюдать какую-то одну становится проблематично.

В 2008 году этой же группе [93] удалось детектировать единичные частицы, причем меньших масс, по сравнению с детектируемыми раньше. В эксперименте использовался микрорезонатор с не очень большой добротностью 6×10^5 , но зато с малым радиусом (до 30 мкм.). В эксперименте удалось детектировать единичные вирусы гриппа, диаметр молекулы которых всего 47 нм..

Достаточно сложные эксперименты, но дающие хорошую точность измерения для слоя воды, учитывают изменение температуры микрорезонатора при появлении адсорбированного слоя на поверхности [101]. Эксперимент 2014 года проводился с микрорезонатором из плавленого кварца радиуса 300 мкм. с добротностью 3×10^6 . При медленной, с частотой несколько мегагерц в секунду, перестройке частоты лазера в сторону увеличения частоты и в сторону уменьшения частоты появляется температурная бистабильность. В этом случае при сканировании в область увеличения частоты при приближении к резонансу увеличивается адсорбированная энергия, и ширина линии уменьшается. При обратной перестройке

частоты ширина увеличивается. Используя этот эффект, зависящий от толщины адсорбированного слоя, можно получить его толщину, зная коэффициент поглощения в нем. Точность, с которой получается измерить толщину слоя воды на поверхности резонатора, составляет около одного процента для слоя воды толщиной около 1 ангстрема, что дает возможность использовать этот метод для высокочувствительных сенсоров.

Также были проведены эксперименты, в которых содержащая детектируемое вещество жидкость протекала внутри растянутого капилляра. Толщина капилляра варьировалась его разной степенью растяжения. [94, 102–108]. Плюсами такого метода являются легкость детектирования жидкостей и возможность оптимизировать толщину капилляра для уменьшения температурных флуктуаций. Был проведен еще один эксперимент [109]. Внутренняя поверхность резонатора покрывалась флуоресцентными нанокристаллами кремния, и детектировалось рассеянное ими излучение. В целом, данный метод обладает большой чувствительностью, и им успешно детектировались биомолекулы рака, вирусы, протеины и ДНК, но уровень детектирования одной молекулы пока не достигнут.

3.1.6.4 Покрытия поверхности

Одним из самых важных аспектов для сенсоров является специальное покрытие их поверхности.

Резонаторы из плавленого кварца изначально слабо селективны и большинство биовеществ и биомолекул адсорбируется на поверхность одинаково. Чтобы сделать поверхность резонатора селективной к определенным видам молекул необходимо произвести функционализацию его поверхности.

Перед функционализацией нужно очистить поверхности резонатора. Это можно сделать, опустив резонатор в смесь перекиси водорода с серной кислотой или с помощью кислородной плазмы, что значительно быстрее и не требует контакта с растворами и сушилки.

Затем поверхность резонатора подвергается силанизации, что делает ее гидрофобной [110]. Гидрофобность поверхности имеет очень большое значение, так как поглощение в адсорбированном слое воды на поверхности может сделать практически невозможным детектирование частиц на поверхности резонатора [111].

После процесса силанизации или вместо нее на поверхность можно наносить лиганды, которые будут обеспечивать селективную адсорбцию. В качестве лигандов могут выступать различные вещества: от небольших молекул до ферментов и молекул ДНК. Слой лигандов должен быть не очень толстым, чтобы часть поля, выпадающего из резонатора, проникала через этот слой для воздействия с адсорбентом. Кроме того, так как добротность резонатора крайне чувствительна к неоднородностям на поверхности, слой лигандов должен быть достаточно однородным.

Для каждого вещества нужны свои лиганды, так как сами вещества бывают довольно сложными. Например, рибонуклеиновые кислоты имеют форму одинарной спирали, дезоксирибонуклеиновая кислоты — двойной спирали, а белки - произвольных форм. Соответственно, под каждое соединение нужно подобрать такой лиганд, чтобы именно это соединение эффективно на него "садились" и адсорбировалось, а остальные - нет.

Лиганды бывают двух типов: ковалентные и нековалентные. Ковалентные активнее взаимодействуют с детектируемым веществом и дают возможность контролировать ориентацию сающихся молекул. Нековалентные меньше взаимодействуют с поверхностью и не обеспечивают контроля ориентации осаждающихся молекул, но зато меньше влияют на поверхность резонатора.

В качестве молекул для ковалентной лиганды обычно выбирают бифункциональные молекулы, один конец которой притягивается к поверхности резонатора, а другой реагирует с детектируемым веществом. Для микрорезонаторов из кремния удобно выбирать алкалины, с одной стороны которых может быть трихлоро, триметокси или триэтокси силан группа. Они удобны тем, что обладают высоким давлением насыщенных паров. Это дает возможность осаждать их на резонатор, не разрушая его поверхность. [112]

Нековалентные лиганды обычно просто адсорбируются на поверхность резонатора. Это может привести как к неравномерности толщины слоя лигандов, так и к их неправильной ориентации, что, в свою очередь, поведет за собой также неравномерность осаждения на них детектируемого вещества. Более подробно с нековалентными и с ковалентными лигандами можно познакомиться [113], [114], [115], [116], [117].

В работе [118] подробно исследовалось детектирование веществ в растворе. Для этого была сделана ячейка, которая состояла из проточной камеры с микрорезонатором в ее центре. Резонатор был сделан из плавленого кварца и имел радиус 340 мкм. Связь с резонатором осуществлялась призмой, являющейся одной из границ ячейки. Особенностью эксперимента также было то, что измерения проводились не только около одной моды, а в очень широком диапазоне частот: как в видимом, так и в ультрафиолете. В работе проводился подробный анализ покрытий резонатора, необходимых для эффективной адсорбции красителей, ароматических соединений и биомолекул. Правильно выбранное покрытие может существенно улучшить селективность и скорость осаждения детектируемых молекул на поверхности, что приведет к улучшению характеристик детектора.

3.1.6.5 Шумы в резонаторах

Предельная чувствительность микрорезонаторов ограничена не только их добротностью, но также шумами. В число шумов входят как случайность процесса взаимодействия детектируемого вещества с поверхностью микрорезонатора [119] так и терморефрактивные и тер-

моупругие шумы, шумы лазера и другие флуктуации и технические шумы [120]. Шумы, связанные с резонатором, не только снижают чувствительность, но препятствуют точной настройке расстояния между резонатором и элементом связи и могут приводить к ложноположительным срабатываниям датчика. Флуктуации плотности, температуры и показателя преломления снаружи от резонатора также ухудшают добротность. Как было показано в работе [120], некоторые из шумов можно снизить, выбирая оптимальные параметры схемы детектирования. Например, большая частота сканирования лазером приводит к большей точности измерений. Размер резонатора также играет большую роль: он позволяет выбрать оптимальный набор величин объема моды, добротности и величине выходящего наружу поля. Также для детектирования одиночных частиц оптимальнее выбирать резонаторы большего размера по сравнению с монослоями.

3.1.6.6 Методы, подавляющие некоторые виды шумов

Для борьбы с шумами, кроме выбора оптимальных параметров, можно использовать более сложные схемы, исключая определенные виды шумов. Для уменьшения влияния ухода частоты из-за изменения температуры используются покрытия с отрицательным термооптическим коэффициентом [121], компенсирующие уход резонансной частоты от температурных флуктуаций. Но, такие методы имеют недостаток. Покрытия толщиной около 100 нм., во-первых, уменьшают добротность резонатора, а, во-вторых, значительно ослабляют взаимодействие детектируемого вещества с выпадающим полем.

Существует метод [122], который учитывает поляризацию, измеряя разностную частоту между ТЕ и ТМ модами. Этот метод позволяет уменьшить влияние температурных флуктуаций на измерения и также уменьшить влияние термоупругого шума и теплового расширения микрорезонатора. Как было показано в работе, для водяных растворов глюкозы при комнатной температуре даже при типичных флуктуациях температуры резонатора на $1C^0$, достигается выигрыш в чувствительности до двух порядков.

В работе [123] использовались два различных микрорезонатора для исключения шумов, связанных с флуктуациями температуры. Суть метода в том, что сдвиг частоты зависит от изменения показателя преломления, а коэффициент определяется радиусом. Таким образом, при использовании двух разных резонаторов получается отделить сдвиги частоты, вызванные флуктуационными изменениями температуры, от сдвигов, вызванных изменением показателя преломления.

3.1.6.7 Флюоресцентные сферы

В качестве отдельного класса детекторов можно выделить схемы, в которых покрытые флюоресцирующим покрытием микрорезонаторы помещаются в раствор [124]. В этом случае

резонаторы не связаны с элементами связи, а свободны в жидкости, в которой находится детектируемое вещество. В малой области, где может находиться только одна молекула, флюоресцентное покрытие возбуждается, и затем детектируется флюоресцентное излучение, частота которого не совпадает с частотой лазера. При такой схеме в детектировании участвует вся поверхность резонатора, что увеличивает вероятность и скорость детектирования. Кроме того, эта схема избавляет и от шумов, связанных с вариацией расстояния между элементом связи и резонатором. Большим плюсом данного метода является то, что флюоресцентные микрорезонаторы коммерчески доступны.

3.1.7 Использование

Имея полное представление об интересующих нас сенсорах, стоит вернуться непосредственно к принципу их действия. Как упоминалось ранее, при попадании детектируемого вещества на поверхность резонатора образуется слой адсорбированного вещества, толщина которого обычно не превышает нанометра [125–127], происходит сдвиг собственных частот и изменение добротности микрорезонатора вследствие модификации граничных условий. Измерение сдвига резонансной частоты играет ключевую роль в работе оптических сенсоров на резонаторах с МШГ и определяет их предельную чувствительность. Существует несколько методов решения данной задачи. Первый подход основан на аналитическом решении характеристического уравнения в случае сферического микрорезонатора в приближении тонкого диэлектрического слоя на его поверхности. Второй использует адиабатический инвариант и тензор Максвелла, что делает его более общим и, в отличие от решения характеристического уравнения, позволяет рассчитывать поправки для микрорезонаторов более сложной геометрии. Этот метод эквивалентен известному методу теории возмущений.

Рассмотрим сферический микрорезонатор и покажем, что поглощение в тонком слое на поверхности резонатора по-разному влияет на добротность ТЕ и ТМ мод. Выражения для сдвигов, полученные для сферических микрорезонаторов, обычно можно использовать как хорошее приближение и для микрорезонаторов сфероидальной и тороидальной формы. Следует отметить, что в литературе существуют различающиеся выражения для оптических потерь в поверхностном слое, имеющие разные зависимости от длины волны и размера резонатора [125–129].

3.2 Расчет поправок для тонкого слоя

3.2.1 Характеристическое уравнение

3.2.1.1 Диэлектрическая сфера

Собственные частоты сферического резонатора с простейшим граничным условием Дирихле для электрического поля (металлическая граница) определяются корнями сферических функции Бесселя (2.11). Для диэлектрических резонаторов на границе поле не обращается в 0, и необходимо учитывать различные граничные условия для компонент поля. Вследствие изменения граничных условий поле частично «выпадает» из резонатора, что приводит к сдвигу собственной частоты. Так как сдвиг мал по сравнению с собственными частотами мод ШГ, то будем называть его поправкой. Выражение для нее определяется [20]

$$\Delta(nk_0a) = -\frac{nP/P_e}{\sqrt{n^2 - n_e^2}}, \quad (3.2)$$

где n_e — показатель преломления среды, окружающей резонатор, а P и P_e равны 1 для ТЕ мод и $1/n^2$ и $1/n_e^2$ для ТМ мод соответственно.

Точность этого выражения для мод шепчущей галереи составляет $\sim \alpha_q(2/m)^{2/3}$ [20, 29, 130], где α_q — q -тый корень функции Эйри, и потому слабо зависит от индекса q для больших m (мод с большой добротностью).

На рис. (3.1) показаны результаты численного анализа характеристического уравнения вблизи корней функции Бесселя с $q \geq 1$. Как видно из графика, поправки очень слабо зависят от q . Существенные отклонения для мод с $q > 6$ при $m = 100$ обусловлены быстрым ухудшением локализации и, соответственно, излучательной добротности мод [29].

3.2.1.2 Поправки тонкого слоя

Рассмотрим оптический сферический резонатор с тонким слоем пробного оптического материала на поверхности толщиной $d \ll \lambda$ (λ — длина волны) с другим показателем преломления n_p (рис. (3.2)). Так как детектирование вещества может происходить не только в воздухе [131], но и, например, в растворах [132], то окружающая резонатор среда выбирается с показателем преломления, отличным от 1. Для того, чтобы рассчитать поправку для собственной частоты нужно воспользоваться условием сшивки для тангенциальных составляющих полей дважды: на границе между резонатором и слоем и между слоем и окружающей средой:

$$\vec{E}_\tau^{res}|_a = \vec{E}_\tau^l|_a, \quad \vec{B}_\tau^{res}|_a = \vec{B}_\tau^l|_a, \quad (3.3)$$

$$\vec{E}_\tau^l|_{a+d} = \vec{E}_\tau^{ext}|_{a+d}, \quad \vec{B}_\tau^l|_{a+d} = \vec{B}_\tau^{ext}|_{a+d}, \quad (3.4)$$

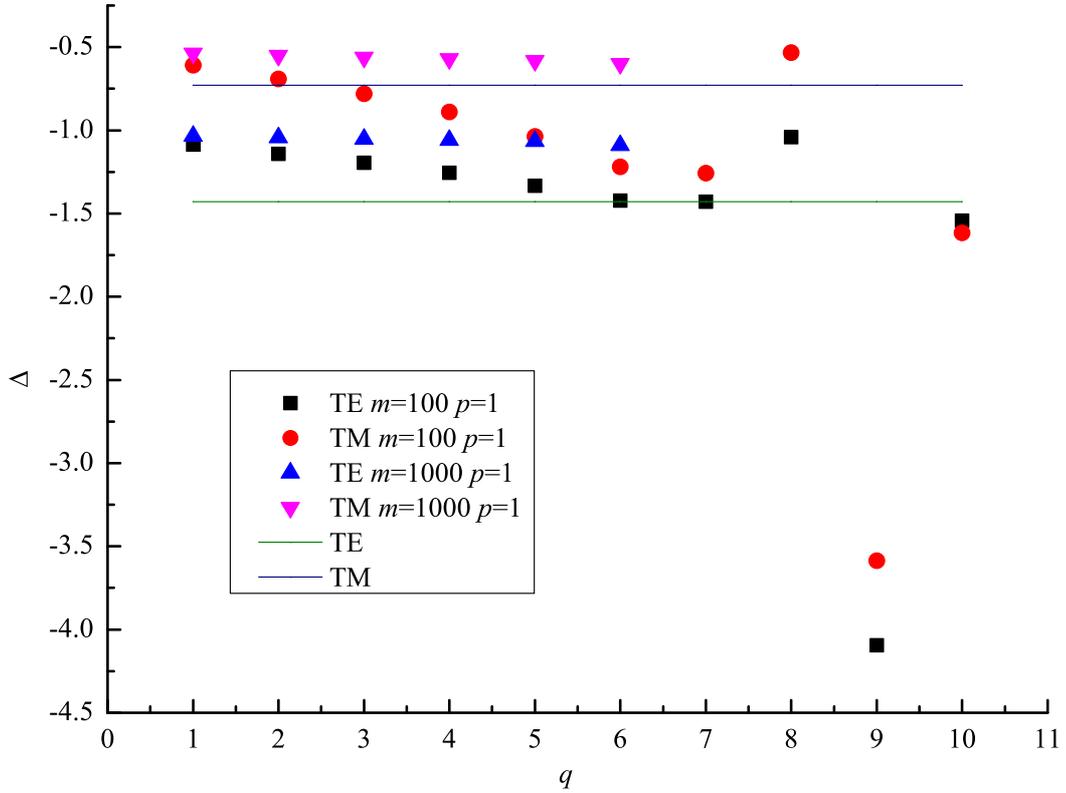


Рис. 3.1: График зависимости поправки для диэлектрического резонатора от индекса моды q

где \vec{E} и \vec{B} электрическое и магнитное поля, а индексы res , l и ext соответствуют полям внутри резонатора, внутри слоя и в среде соответственно.

Этот метод нахождения сдвига собственных частот позволяет найти поправку с любой точностью, так как не использует никаких дополнительных условий. Рассмотрим наиболее простой случай, допускающий аналитическое решение, когда резонатор имеет сферическую форму. Используя решение в виде (2.7), выберем функцию $\psi_\ell(nk_0r)$, в слое $\alpha\psi_\ell(n_pk_0r) + \beta\chi_\ell(n_pk_0r)$ и снаружи $\gamma\chi_\ell(n_e k_0r)$. При этом мы пренебрегли $\psi_\ell(n_e k_0r)$ в среде ввиду ее малости в области от 0 до ее корней по сравнению с функцией $\chi_\ell(k_0r)$. Используя граничные условия, можно получить систему уравнений на границе резонатора и слоя:

$$\frac{1}{n\sqrt{P}}\psi_\ell(nk_0a) = \frac{1}{n_p\sqrt{P_p}}(\alpha\chi_\ell(n_pk_0a) + \beta\chi_\ell(n_pk_0a)), \quad (3.5)$$

$$\sqrt{P}\psi'_\ell(nk_0a) = \sqrt{P_p}(\alpha\psi'_\ell(n_pk_0a) + \beta\chi'_\ell(n_pk_0a)) \quad (3.6)$$

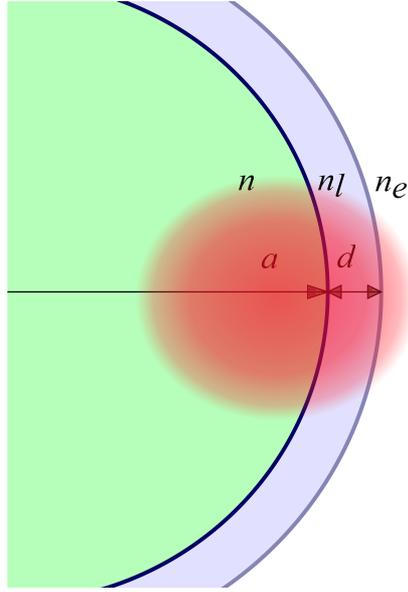


Рис. 3.2: Распределение поля в резонаторе и слое для фундаментальной моды

и аналогично на границе слоя и среды

$$\frac{1}{n_p \sqrt{P_p}} (\alpha \psi_\ell(n_p k_0(a+d)) + \beta \chi_\ell(n_p k_0(a+d))) = \frac{1}{n_e \sqrt{P_e}} \gamma \chi_\ell(n_e k_0(a+d)), \quad (3.7)$$

$$\sqrt{P_p} (\alpha \psi'_\ell(n_p k_0(a+d)) + \beta \chi'_\ell(n_p k_0(a+d))) = \sqrt{P_e} \gamma \chi'_\ell(n_e k_0(a+d)), \quad (3.8)$$

где α , β и γ определяют отношение амплитуд поля в средах и P_p равно 1 для ТЕ мод и $1/n_p^2$ для ТМ мод. В общем виде эта система относительно k_0 не разрешается, но ее удается разрешить в допущении тонкого слоя, много меньшего радиуса резонатора и длины волны.

Разложим члены в уравнениях, содержащие d , по малому параметру $\eta = d/a$ и избавимся от вторых производных, воспользовавшись дифференциальным уравнением для функций Рикатти-Бесселя:

$$\frac{1}{n \sqrt{P}} \psi_\ell(n k_0 a) + k_0 d \frac{\sqrt{P}}{P_p} \psi'_\ell(n k_0 a) = \gamma (\chi'_\ell(n_e k_0 a) + k_0 d \chi'_\ell(n_e k_0 a)) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{P} \psi_\ell(n k_0 a) - k_0 d \left(1 - \frac{l(l+1)}{n_p^2 k_0^2 a^2}\right) \frac{n_p^2 P_p}{n \sqrt{P}} \psi_\ell(n k_0 a) = \\ = P_e \gamma \left(\chi'_\ell(n_e k_0 a) - n_e k_0 d \left(1 - \frac{l(l+1)}{n_e^2 k_0^2 a^2}\right) \chi_\ell(n_e k_0 a) \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как влияние слоя мало, то поправку Δ_p можно рассчитывать как

$$n k_0 a = t_{m,q} + \Delta_0 + \Delta_p \quad (3.11)$$

Учитывая малость поправки, из характеристического уравнения вблизи корней функции Бесселя можно получить выражения, связывающее функции второго рода с их производными

$$\psi_\ell(t_{m,q} + \Delta) = \Delta \psi'_\ell(t_{m,q}), \quad (3.12)$$

$$\chi'_\ell(n_e k_0 a) = \sqrt{n^2/n_e^2 - 1} \chi_\ell(n_e k_0 a). \quad (3.13)$$

Подставив выражения ((3.12)) и ((3.13)) в ((3.9)) и в ((3.10)), разделив первое уравнение на второе, можно получить:

$$\frac{\frac{1}{nP}(\Delta_0 + \Delta_1) + k_0 d \frac{1}{P_p}}{1 + \frac{k_0 d n_p^2 P_p}{P_e \sqrt{n^2 - 1}} \left(1 - \frac{l(l+1)}{z^2}\right)} = \frac{-1}{n_e P_e \sqrt{n^2 - 1}} \frac{1 - k_0 d \sqrt{n^2 - n_e^2}}{1 + \frac{n_e k_0 d}{\sqrt{n^2 - 1}} \left(1 - \frac{l(l+1)}{k_0^2 a^2}\right)}. \quad (3.14)$$

Уравнение разрешается относительно Δ_p

$$\Delta_p = -nk_0 d \frac{P_p}{P_e} \left(\frac{P_e}{P_p} + \frac{n_p^2 P_p - n^2 P_e}{P_e (n^2 - n_e^2)} + \frac{n^2 P_e - P_p}{P_e} \frac{l(l+1)}{k_0^2 d^2} \right). \quad (3.15)$$

Учитывая, что P_p равно 1 или $1/n_p^2$ в зависимости от типа моды и $nk_0 a \approx \ell$, можно получить достаточно простое выражение:

$$\Delta_p = -nk_0 d \frac{n_p^2 - n_e^2}{n^2 - n_e^2} (1 + n_e^2 (P_p - P)) \quad (3.16)$$

Это выражение согласуется с полученным в более ранних работах [133], но при этом имеет более простой вид. Так как в микрорезонаторных биосенсорах детектируемые величины крайне малы [134] и практически не зависят от членов $l^{-1/3}$, то для большинства приложений выражение ((3.16)) хорошо описывает величину поправки.

Используя полученное выражение, также можно рассчитать изменение добротности резонатора, вносимое тонким слоем при наличии в нем затухания. Как было показано в работах [126, 135], такие потери из-за поглощения в тонком слое воды на поверхности резонатора могут очень существенно ограничивать добротность реального резонатора. Пусть показатель преломления слоя можно записать в виде $n_p \rightarrow n_{pr} - in_p''$, где $n_p'' = -\alpha_p/2k_0$ (α_p – оптические потери в материале), тогда $Q_p = \frac{nk_0 a}{2\text{Im}(\Delta_p)}$ и

$$Q_{p,TE}^{-1} \approx \frac{d}{a} \frac{4n_r}{n^2 - n_e^2} n_p'',$$

$$Q_{p,TM}^{-1} \approx Q_{p,TE}^{-1} \left(\frac{n^2 - n_e^2}{n^2} + \frac{n_e^4}{n_p^4} \right). \quad (3.17)$$

3.2.2 Расчет через тензор Максвелла

Чтобы рассчитать поправки для тонкого слоя, воспользуемся еще одним методом электродинамики.

При медленном адиабатическом изменении параметров системы величины, называемые адиабатическими инвариантами, не изменяются. В частности:

$$\frac{\Delta A}{\mathcal{E}} = -\frac{\Delta\omega}{\omega}, \quad (3.18)$$

где ΔA — работа пондеромоторных сил давления света по перемещению границы адсорбированного слоя, \mathcal{E} — энергия поля. Так как микрорезонатор с диэлектрической границей является открытой системой, то интеграл энергии во всем пространстве расходится. Существуют разные методы обхода этого ограничения [29]. В настоящей работе в качестве энергии поля выберется энергия, сосредоточенная внутри резонатора, что является хорошим приближением для высокочастотного микрорезонатора и обеспечивает сходимость интеграла.

Чтобы получить изменение собственных частот адиабатически увеличим толщину слоя на поверхности резонатора от 0 до d . Чтобы найти работу поля внутри слоя нужно получить разницу давления световой волны в слое и в окружающем слой пространстве. При этом удобно воспользоваться тензором Максвелла σ_{ij} в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ [136]:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(\epsilon E_i E_j + H_i H_j - \frac{\epsilon E^2 + H^2}{2} \delta_{ij} \right), \quad (3.19)$$

который необходимо использовать в сферических координатах. Разницу давлений на поверхности сред с показателями преломления ϵ_p и ϵ_e можно получить как

$$p = \sigma_{rr}|_{\text{in}} - \sigma_{rr}|_{\text{out}} = \frac{(\epsilon_p - \epsilon_e)}{8\pi} \left[\frac{\epsilon_p}{\epsilon_e} E_r^2 + [E_\phi^2 + E_\theta^2] \right]. \quad (3.20)$$

Для получения работы нужно проинтегрировать силу на всей внутренней поверхности слоя, действующую на элементарную площади поверхности dS , на толщине слоя в данной точке поверхности. Так как толщина слоя мала и предполагается одинаковой на всей поверхности резонатора, то изменением напряженности поля в слое мы пренебрегаем:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\int dS(pd)}{\mathcal{E}}, \quad (3.21)$$

где энергия поля в резонаторе определяется по формуле

$$\mathcal{E} = \int \frac{1}{4\pi} \epsilon E^2 dV. \quad (3.22)$$

Это выражение совпадает с выражением, полученным другим методом из обобщения теории возмущения границы двух диэлектриков с ϵ_1 и ϵ_2 , полученным в [137]:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\alpha} = \int dA \frac{dh}{d\alpha} \left[\Delta\epsilon_{12} |E_{\parallel}^{(0)}|^2 - \Delta(\epsilon_{12}^{-1}) |D_{\perp}^{(0)}|^2 \right], \quad (3.23)$$

где α – безразмерный параметр, характеризующий возмущение, $h(\alpha)$ – смещение границы, dA – элемент площади на границе, $E_{\parallel}^{(0)}$ и $D_{\perp}^{(0)}$ невозмущенные параллельная и нормальная к границе напряженность электрического поля и электрическая индукция соответственно, $\Delta\epsilon_{12} = \epsilon_1 - \epsilon_2$ и $\Delta(\epsilon_{12}^{-1}) = \epsilon_1^{-1} - \epsilon_2^{-1}$.

Рассчитаем поправку из этого выражения и сравним ее с результатом, полученным выше, из аналитического точного решения.

Поскольку угловая зависимость для ТЕ мод в числителе и в знаменателе одинаковая, выражение ((3.21)) сводится к

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = - \frac{pda^2}{\int E^2 r^2 dr}. \quad (3.24)$$

Для расчета ТЕ мод интеграл в знаменателе берется:

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{C_{TM}^2}{n^2 k_0^2 \ell(\ell+1)} \frac{\pi n k_0 r}{2} J_{\ell+1/2}(nk_0 r)^2 dr &= \\ &= \frac{C_{TM}^2}{n^2 k_0^2 \ell(\ell+1)} \frac{\pi a^2}{4nk_0} \left(J_{\ell+1/2}(nk_0 a)^2 - J_{\ell-1/2}(nk_0 a) J_{\ell+3/2}(nk_0 a) \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Так как для МШГ $\ell \approx m \gg 1$ велико, то

$$J'_{\ell+1/2}(nk_0 a) \approx J'_{\ell-1/2}(nk_0 a) \approx J'_{\ell+3/2}(nk_0 a) = G. \quad (3.26)$$

Электрическое поле для ТЕ мод тангенциальное и не имеет компонент, направленных перпендикулярно поверхности, и в слое будет отличаться в n_p^2/n^2 раз. Пользуясь этим, поле в слое можно выразить через поле на границе внутри резонатора. Подставляя полученные выражения в ((3.24)) можно получить:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = - \frac{n_p^2 - n_e^2}{n^2 - n_e^2} \frac{d}{a} \quad (3.27)$$

и соответственно:

$$\Delta(nka) = -nk d \frac{n_p^2 - n_e^2}{n^2 - n_e^2}. \quad (3.28)$$

Для ТМ мод электрическое поле имеет также нормальную к поверхности компоненту. Интегрируя отдельно угловые части для всех трех компонент поля и оценивая их радиальные части можно получить, что θ компонента поля много меньше двух других компонент.

Получая интегралы для радиальных части энергии поля ТМ мод:

$$\int_0^a \frac{C_{TM}^2}{k_0^2 l(l+1)} \left(\sqrt{\frac{\pi n k_0 r}{2}} J_{\ell+1/2}(n k_0 r) \right)^2 dr = \frac{C_{TM}^2}{k_0^2 l(l+1)} \frac{a m \pi G^2}{8}, \quad (3.29)$$

$$\int_0^a \frac{C_{TM}^2}{k_0^2 l(l+1)} \left(\frac{1}{n k_0 r} \sqrt{\frac{\pi n k_0 r}{2}} J_{\ell+1/2}(n k_0 r) \right)^2 dr = \frac{C_{TM}^2}{k_0^2 l(l+1)} \frac{a \pi G^2}{8 m^2} (2 n k_0 a + m), \quad (3.30)$$

можно получить:

$$\mathbb{R}_{TM} = \frac{C_{TM}^2}{k_0^2 l(l+1)} \frac{a m \pi G^2}{8}. \quad (3.31)$$

Упростить выражения для поля в слое можно, пользуясь условиями сшивки и разложениями для функций Рикатти-Бесселя:

$$R_l = \frac{C_{TM}^2}{k_0^2 l(l+1)} \frac{\pi n k_0 a}{2} \left(\frac{n^4}{n_p^2} G^2 \Delta^2 + G^2 \right) = \frac{C_{TM}^2}{k_0^2 l(l+1)} \frac{\pi n k_0 a}{2} G^2 \frac{n^2 n_e^2 + n_p^2 n^2 - n_p^2 n_e^2}{n_p^2 (n^2 - n_e^2)}. \quad (3.32)$$

Таким образом, для ТМ моды относительная поправка для собственной частоты:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = - \frac{n_p^2 - n_e^2}{n^2 - n_e^2} d \frac{n^2 n_e^2 + n_p^2 n^2 - n_p^2 n_e^2}{a n^2 n_p^2}. \quad (3.33)$$

Полученный результат сходится как с результатом, полученным с помощью характеристического уравнения, так и с результатами, полученными ранее в работе ([133]).

3.3 Заключение

В настоящей работе были продемонстрированы новые подходы к оценке сдвига собственных частот при осаждении тонкого диэлектрического слоя на поверхности резонатора. Приведенные методы подтверждают результаты, полученные ранее с использованием возмущения векторного уравнения Гельмгольца [133], но при этом обладают большей простотой, меньшим количеством допущений и физической ясностью. Исходя из рассчитанных поправок, были получены комплексные добавки к частоте из-за наличия поглощения в слое, определяющие

зависимость оптических потерь от длины волны и размера резонатора, и показано, что для ТЕ и ТМ мод они различны. Кроме того, рассматривалась зависимость простой диэлектрической поправки от радиального индекса q , и также было показано, что для $q \leq 6$ поправки можно считать постоянными, а для мод высших порядков их нужно учитывать более точно.

Эти результаты опубликованы в [169], [1].

Глава 4

Связь РШГ с призмой

4.1 Обзор литературы

Среди возможных способов связи с микрорезонаторами можно выделить два. Первый - это связь свободным пучком и использование элементов связи, в большинстве своем основанных на использовании "выпадающего" поля. И второй - когда при полном внутреннем отражении в резонаторе или элементе связи существует поле снаружи, напряженность которого экспоненциально спадает с расстоянием [91]. Каждый из этих способов имеет свои сильные и слабые стороны. Рассмотрим детальнее принципы их работы.

4.1.1 Взаимодействие со свободным пучком

Так как добротность резонатора с МШГ не бесконечна, существует вытекающее из резонатора поле. В соответствии с принципом локализации для возбуждения резонатора свободным пучком необходимо сфокусировать излучение тангенциально на границе внешней каустики резонатора, то есть на таком расстоянии от резонатора, что тангенциальная составляющая скорости волны равна скорости света [29]. Так как добротность резонаторов с МШГ достаточно велика, то, по принципу взаимности, связь с пучком также крайне мала.

Для достижения приемлемых уровней связи используются различные методы.

Наиболее очевидный метод — добавление дефекта или рассеивающего центра на или у поверхности резонатора. При этом вблизи дефекта нарушается условие полного внутреннего отражения и усиливается излучение. Чем больше выходит поле из области с дефектом, тем меньше становится добротность резонатора и тем большую связь можно получить. В работе [138] теоретически исследовалось добавление дефекта внутрь резонатора и было показано, что небольшой дефект внутри резонатора добавляет эмиссию поля из резонатора вблизи себя, при этом сохраняя гладкую поверхность резонатора и высокую добротность. Крупные

дефекты не дают возможности получить высокодобротные моды.

Для получения хорошей связи можно использовать не осесимметричные резонаторы. В зависимости от формы резонатора можно получать разное количество областей с увеличенной эмиссией. Подробное теоретическое исследование и объяснения возбуждения с помощью квантовой теории рассеяния можно найти в [139].

Существуют также экзотические методы, позволяющие получить связь с осесимметричным резонатором без дефектов. В работе [140] проводится численное моделирование резонатора с волноводом, подведенным перпендикулярно поверхности резонатора. Утверждается, что за счет интерференции возможна связь до 75%.

4.1.2 Условие фазового синхронизма

Условие фазового синхронизма крайне важно для возбуждения мод резонатора с МШГ. Для того, чтобы условие фазового синхронизма выполнялось, необходимо, чтобы тангенциальные составляющие волнового вектора в резонаторе и в элементе связи были близки:

$$k_{device} \approx k_{resonator} \quad (4.1)$$

Чем с большей точностью выполняется данное условие, тем больших величин связи можно достичь.

4.1.3 Связь с помощью волокон

При нарушении структуры оптического волокна часть света начинает "выпадать" из него. В эту область подносят резонатор, и при выполнении условия фазового синхронизма, которое заключается в близости эффективного показателя преломления волокна и резонатора, происходит возбуждение.

Наиболее распространенным является метод связи резонаторов с МШГ с растянутым волокном [141]. Для того, чтобы получить растянутое волокно, обычное оптическое волокно на требуемую длину волны локально нагревают лазером или горелкой, затем растягивают обычно при помощи специальных установок. При этом нагретая область утончается до характерных толщин в 1мкм. Данный процесс достаточно сложен, так как растянутое волокно довольно хрупкое. Его толщина вдоль растянутой области зависит и от температуры и от ее распределения в нагретой области, а также скорости растягивания. В настоящий момент не существует коммерческих установок по растягиванию волокна.

Впервые успешная связь с волокном была продемонстрирована в [142] для сферических микрорезонаторов. В работе экспериментально была получена связь с низкодобротным резонатором ($Q \approx 2.5 \times 10^5$) с Гаусовым полем волокна с сравнительно небольшой эффектив-

ностью в 1%. В дальнейшем эффективность связи с волокном значительно возросла: для добротных резонаторов ($Q > 10^6$) в эксперименте [143] был достигнут коэффициент связи 90%. Наибольшая связь с резонатором с МШГ с помощью растянутого волокна достигала 99.97% [144].

Процесс связи с волокном достаточно хорошо исследован и оптимизирован, в том числе аналитически. Первое моделирование связи цилиндрического микрорезонатора с волноводом (и аналогично с призмой) было выполнено в [145]. В этой работе впервые продемонстрировано наличие оптимального расстояния от волновода до резонатора для резонансного возбуждения, обусловленного особенностями пространственного распределения полей. В работе [146] численно была рассмотрена связь фундаментальной моды сферы с МШГ с фундаментальной модой волокна. При этом было показано, что для оптимальной связи сфера и волокно должны касаться друг друга, причем при увеличении расстояния между ними эффективность связи падает. Также для достижения максимальной связи диаметр волокна должен быть примерно на 30% меньше необходимого значения для идеального фазового синхронизма. Кроме того, было отмечено, что ТЕ моды имеют большую эффективность связи по сравнению с ТМ модами.

Существуют также методы связи с волокном, не связанные с растяжением волокна. Полированные волокна позволяют получить эффективность связи около 10% [147]. Сточенные с торца оптические волокна, называемые "пигтэйлами" [148] позволяют достичь эффективности связи 60%. В работе [149] была продемонстрирована связь с протравленным волокном с фотонно-кристалльной серединой. После процесса травления оставалась сердцевина волокна, размером около 2 мкм, с которой связывали резонатор, и края, препятствующие механическим воздействиям. Резонатор вносился между краями и сердцевиной. Связь в такой схеме продемонстрирована до 51%. Так как протравленное волокно образует Фабри-Перо резонатор, то в схеме были обнаружены резонансы Фано, форма которых зависела от частоты света и геометрических параметров волновода.

В последнее десятилетие идет активная работа в разработке методов увеличения стабильности и устойчивости к внешним факторам схем с растянутым волокном. В [150] была продемонстрирована связь резонатора с приваренным к нему волокном. Данная схема не вносит значительных потерь на прохождение света по волокну, значительно увеличивает стабильность связи к вибрациям и воздушным потокам, но, к сожалению, обладает достаточно высоким уровнем связи. В работах [151] и [152] были продемонстрированы резонаторы с добротностями 10^7 и 10^8 , помещенные в диэлектрик с небольшим показателем преломления, и коэффициентами связи 50% и 81% соответственно. Также было показано, что такие системы могут являться хорошими датчиками. В частности, в [152] был продемонстрирован датчик температуры с чувствительностью до $1.1 \times 10^{-4} K$.

4.1.4 Связь в дифракционными решетками

Относительно новым методом связи является связь с помощью дифракционных решеток. Они могут быть нанесены поперек распространения света или вдоль него. Особенностью дифракционных решеток является возможность возбуждения волн сразу в 2-х направлениях, а также падающим нормально к поверхности резонатора пучком.

В работе [153] была экспериментально получена связь резонатора с помощью дифракционной решетки из 6 штрихов, напыленной на диэлектрик. Эффективность связи достигала 75%. Так же при связи с дифракционной решеткой наблюдались резонансы Фано из-за взаимодействия аномалий Вуда, возникающих из-за резонансного возбуждения поверхностных волн в решетке, и резонаторе с МШГ.

В [154] рассматривается новый подход к связи через дифракционные решетки с большим периодом, сделанные внутри волокна вне растянутой области. Решетка позволяет возбудить моды высокого порядка, которые затем распространяясь в растянутой области позволяют связываться с определенными модами резонатора. С помощью такого метода можно возбуждать ТЕ и ТМ моды одновременно. Так же было оптимизировано возбуждение мод высоких порядков с помощью подбора дисперсии, вносимой волноводом. В [154] было также показано, что растянутые волокна с длиннопериодной решеткой, возбуждая различные моды оплетки, позволяют делать область с растянутым волокном до 10 раз толще, что обеспечивает большую устойчивость к внешним воздействиям относительно обычных схем по возбуждению резонатора растянутым волокном. Эффективность в эксперименте с такими решетками достигала 22%. В [155] в эксперименте использовались длиннопериодные решетки, расположенные до области растянутого волокна, и короткопериодные дифракционные решетки, расположенные после, возвращающие измененные первой решеткой моды к исходным, одновременно, что позволило возбуждать разные резонаторы на одном волокне разными длинами волн при достаточно высоком коэффициенте связи, достигающем в эксперименте 60%.

4.1.5 Другие способы связи

Существуют также другие методы связи с резонаторами с МШГ.

В работе [156] была продемонстрирована связь резонатора с полосковым антирезонансным пьедесталом на уровне 98%. Для кварцевого микрорезонатора полосок был сделан из слоев Si и SiO_2 и был оптимизирован на минимальные потери на исследуемой длине волны (1.55мкм). Данный вид связи так же является достаточно устойчивым к механическим воздействиям.

4.1.6 Призма

Исторически использование призмы было первым предложенным методом связи с резонатором с МШГ [2], и этот метод, по-прежнему, является наиболее простым и позволяющим получить эффективность связи до 75% [157]. В настоящее время во многих экспериментах для связи с резонаторами, форма которых отличается от сферической, также продолжает использоваться призма: [158], [159], [160], [161], [162], [163]. Для аппроксимации формы таких резонаторов можно использовать сфероид [30], являющийся, с одной стороны, хорошим приближением для описания формы резонаторов в области, в которой распространяется свет, а, с другой стороны, позволяющий получить хорошую точность при расчете собственных частот [130].

4.2 Связь с несферическим резонатором с помощью призмы

4.2.1 Распределение поля снаружи резонатора

Для того, чтобы связаться с резонатором через призму, излучение должно быть сфокусировано на внутренней поверхности призмы под углом, большем полного внутреннего отражения, а резонатор должен быть поднесен к точке фокусировки на расстояние порядка $\lambda/2\pi$, где λ - длина волны [15]. Аналогично предыдущей работе [15], выбираются сферическая система координат в центре резонатора и декартова система координат с центром в точке фокусировки излучения (4.1). Так как для сфероидальной геометрии уравнение Гельмгольца не может

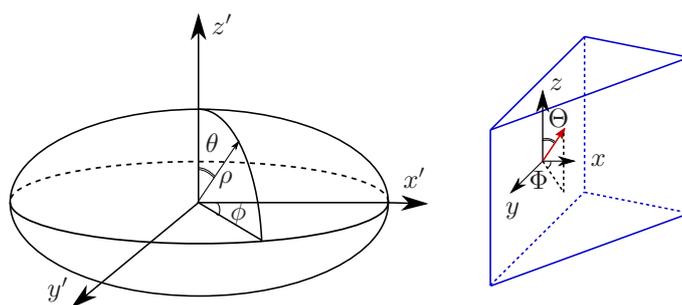


Рис. 4.1: Сферическая система координат с началом в центре резонатора и декартова с началом в точке фокусировки излучения

быть решено явно, используются приближения (2.99) для распределения поля в резонаторе. Для фундаментальной моды резонатора распределение поля на поверхности резонатора

может быть записано в виде:

$$E_{ll} = c_{ll} e^{-\tilde{\theta}^2/2} e^{im\phi} \quad (4.2)$$

а для мод высокого порядка с $l - m \gg 1$

$$E_{lm} = c_{lm} \cos \left[\sqrt{2} \sqrt{l - m} \tilde{\theta} + \frac{\pi}{2} (l - m) \right] e^{im\phi}, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sqrt[4]{\frac{m^2 \tilde{b}^2}{\tilde{a}^2} - \frac{1}{4}}, \\ \tilde{a} &= a + Pr^*, \quad \tilde{b} = \sqrt{\tilde{a} \left(\frac{b^2}{a} - \Delta_\rho \right)}, \\ 1/r^* &= k \sqrt{n_r^2 - 1}, \quad \Delta_\rho \approx 1.05 a m^{-2/3}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где y и z - координаты снаружи от сфероида и c_{ll} и c_{lm} - нормировочные константы. Влияние выпадающего из резонатора поля при расчете эффективных геометрических параметров сфероида не учитывалось, так как оно имеет порядок малости $O(m^{-2/3})$ по сравнению с исходными параметрами сфероида и, таким образом, полагается, что $\tilde{a} \approx a$ и $\tilde{b} \approx b$.

Отметим, что выражения для распределения поля несферического резонатора были впервые получены в работе [164], опубликованной раньше, чем [165], на которую ссылаются в [166]. Эквивалентность распределений [164] и [165] легко показать простым преобразованием координат. Метод, описанный в последней, использует ортогональную систему координат в которой производные коэффициентов Ламе малы и ими можно пренебречь, что позволяет упростить уравнение Гельмгольца и записать решение радиальной части через функции Эйри, а угловой через функции Гаусс-Эрмитта, в то время как в работе [164] используется метод приближение для радиальной части через цилиндрические функции Бесселя. Поскольку функции Бесселя высокого порядка можно аппроксимировать через функции Эйри, оба подхода асимптотически идентичны. Поскольку для исследования связи играют роль только угловые распределения и рассматриваются моды очень высокого порядка, отличия в аппроксимациях роли не играет. Простое координатное преобразование показывает, что выражения для амплитуды поля идентичны. Предполагая, что сфероидальные координаты ζ и η соответствуют координатам u — расстоянию от рассматриваемой точки до поверхности, и θr — произведению локальной кривизны на полярный угол, угловая и радиальная часть распре-

деления поля представляются как

$$E_{\Theta}(\theta, \phi) = e^{-\theta^2/(2\theta_m^2)} H_p(\theta/\theta_m) e^{im\phi} \quad (4.5)$$

$$E_R(u) = \text{Ai}\left(\frac{u-\delta}{u_m}\right)$$

где θ_m , δ и u_m определяют параметры распределения поля в резонаторе. Легко также показать, что угловое распределение для фундаментальных мод и мод высокого порядка может быть получено из (4.5) при $p = 0$ и $p \gg 1$ соответственно.

Поле снаружи от резонатора спадает экспоненциально с характерным расстоянием затухания r [15]. Так как радиусы кривизны различны в плоскостях xz и xy , то затухание поля снаружи от резонатора можно выразить как $e^{-z^2/(2a_z r^*) - y^2/(2a_y r^*)}$, где a_z и a_y радиусы кривизны поверхности резонатора в горизонтальной и меридиональной плоскостях. В случае осесимметричного сфероидального резонатора радиус кривизны в экваториальной плоскости $a_z = a$. В меридиональной плоскости зависимость кривизны от угла θ не учитывается и радиус полагается равным радиусу кривизны при $\theta = 0$, что аналогично условию $z = 0$:

$$a_y = \frac{\left| \left(a\sqrt{1 - z^2/b^2} \right)'' \right|}{\left[1 + \left(a\sqrt{1 - z^2/b^2} \right)' \right]^2} \Bigg|_{z=0} = \frac{ab^2}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{b^2}} (a^2 z^2 + b^4 - b^2 z^2) \sqrt{\frac{a^2 z^2}{b^4 - b^2 z^2} + 1}} \Bigg|_{z=0} = \frac{b^2}{a} \quad (4.6)$$

Перемножая выражения для поля снаружи от резонатора (4.2), (4.3) с полученным выражением для спада поля с расстоянием можно получить распределение поля на поверхности призмы.

Для того, чтобы перейти от распределения поля на поверхности призмы к распределению поля внутри нее, используется интеграл Френеля. Распределение поля умножается на $e^{i(k_y y + k_z z)}$ и интегрируется по плоскости призмы, к которой поднесен резонатор. Так как область, к которой проникающее в призму из резонатора поле не мало, значительно меньше размеров призмы, то интегрирование можно производить в бесконечных пределах. Для фундаментальных мод:

$$E_{ll}(k_y, k_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_{l,l} e^{-\frac{z^2}{2b^2} \sqrt{\frac{m^2 b^2}{a^2} - \frac{1}{4}}} e^{i(k_y y + k_z z)} dy dz =$$

$$= c_{l,l} \frac{2\pi a b r e^{-\frac{1}{2} r \left(\frac{b^2 k_z^2}{r \sqrt{\frac{b^2 m^2}{a^2} - \frac{1}{4} + a}} + \frac{(m - a k_y)^2}{a} \right)}}{\sqrt{a \left(r \sqrt{\frac{b^2 m^2}{a^2} - \frac{1}{4} + a} \right)}} \quad (4.7)$$

а для мод высокого порядка

$$\begin{aligned}
E_{m,l}(k_y, k_z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} c_{m,l} e^{i(k_y y + k_z z)} dy dz \times \\
&\times e^{-\frac{y^2+z^2}{2ar} - \frac{imy}{a}} \cos \left(\sqrt{l-m} \sqrt[4]{\frac{4m^2}{\tilde{a}^2 \tilde{b}^2} - \frac{1}{\tilde{b}^4}} z + \frac{\pi}{2}(l-m) \right) = \\
&= 2\pi b r c_{m,l} \cos \left(\frac{1}{2}\pi(l-m) + i b k_z r \sqrt[4]{4b^2 m^2 - a^2} \sqrt{\frac{l-m}{a^3}} \right) \times \\
&\times e^{-\frac{r(a^3 k_y^2 + (l-m)\sqrt{4b^2 m^2 - a^2} - 2a^2 k_y m + a(b^2 k_z^2 + m^2))}{2a^2}}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Представляя косинус комплексного аргумента в виде:

$$\begin{aligned}
&\cos \left(\frac{1}{2}\pi(l-m) + i b k_z r \sqrt[4]{4b^2 m^2 - a^2} \sqrt{\frac{l-m}{a^3}} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left[e^{b k_z r \sqrt[4]{4b^2 m^2 - a^2} \sqrt{\frac{l-m}{a^3}}} \pm e^{-b k_z r \sqrt[4]{4b^2 m^2 - a^2} \sqrt{\frac{l-m}{a^3}}} \right]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Предполагая, что $\tilde{k}_y = k_y/k$ и $\tilde{k}_z = k_z/k$, результат интегрирования можно представить в виде:

$$E(k_z, k_y) \propto e^{-\frac{(\tilde{k}_z - \tilde{k}_{z0})^2}{2\Delta \tilde{k}_z^2} - \frac{(\tilde{k}_y - \tilde{k}_{y0})^2}{2\Delta \tilde{k}_y^2}}.$$

После интегрирования могут быть найдены величины \tilde{k}_{y0} , \tilde{k}_{z0} , которые определяют оптимальные углы падения излучения на внутреннюю границу призмы, а также характерные ширины диапазонов оптимальных углов $\Delta \tilde{k}_z$, $\Delta \tilde{k}_y$ в плоскостях xz и xy соответственно. Для $p = 0$:

$$\tilde{k}_{z0} = \sin \Theta = 0 \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{k}_z^2 &= \Delta \Theta^2 \cos^2 \Phi^2 = \frac{r \sqrt{\frac{b^2 m^2}{a^2} - \frac{1}{4}} + a}{r b^2 n_p^2 k^2} = \\
&= \frac{m n_r \frac{b}{a} + l \sqrt{n_r^2 - 1}}{\frac{n_p^2 b^2}{n_r a^2} l^2}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\tilde{k}_{y0} = \sin \Phi = \frac{m}{n_p k a} \approx \frac{n_r}{n_p} \tag{4.12}$$

$$\Delta \tilde{k}_y^2 = \Delta \Phi^2 \cos^2 \Phi = \frac{1}{n_p^2 k^2 a r} \approx \frac{n_r \sqrt{n_r^2 - 1}}{n_p^2 l}, \tag{4.13}$$

и для $p \gg 1$:

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{z0} &= \sin \Theta \cos \Phi = \pm \frac{\sqrt[4]{4b^2m^2 - a^2}}{bn_p k} \sqrt{\frac{l-m}{a}} \approx \\ &\approx \pm \sqrt{2} \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{n_r}{n_p} \frac{\sqrt{m(l-m)}}{l}\end{aligned}\quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}\Delta k_z^2 &= \Delta \Theta^2 \cos^2 \Phi \cos^2 \Theta = \frac{a}{n_p^2 k^2 b^2 r} \approx \\ &\approx \frac{a^2}{b^2} \frac{n_r \sqrt{n_r^2 - 1}}{n_p^2 l}\end{aligned}\quad (4.15)$$

$$\tilde{k}_{y0} = \sin \Phi \cos \Theta = \frac{m}{akn_p} \approx \frac{mn_r}{ln_p} \quad (4.16)$$

$$\Delta k_y^2 = \Delta \Phi^2 \cos^2 \Phi \cos^2 \Theta = \frac{1}{n_p^2 k^2 a_r} \approx \frac{n_r \sqrt{n_r^2 - 1}}{n_p^2 l}. \quad (4.17)$$

Как легко может быть замечено, новый параметр b определяет характеристики поля в призме. Одно из важнейших соотношений $n_p > n_r$, следующее из условия полного внутреннего отражения на грани призмы и ограничивающее выбор возможных материалов призмы и резонатора, можно получить из (4.12) и (4.16). Это условие не изменяется существенно с изменением b/a из-за характера зависимости собственной частоты от сплюснутости [30]. Основное отличие от случая идеальной сферы в распределении поля в вертикальной плоскости. Для фундаментальных мод характерная ширина распределения поля в призме зависит от сплюснутости. При увеличении сплюснутости резонатора характерная ширина распределения увеличивается из-за уменьшения ширины поля, проникающего из резонатора в призму. Для случая мод высокого порядка с $p \gg 1$ зависимость характерной ширины в зависимости от сплюснутости аналогична и в основном определяется углом прецессии, зависящим в свою очередь от m/l [15].

4.2.2 Оптимизация величины связи

Предполагая, что падающий на грань призмы пучок Гаусов и углы в призме подобраны оптимальным образом, можно получить сплюснутость резонатора, необходимую для наибольшей связи. Предположим, что падающий на призму луч имеет в направлениях y и z ширины g_y и g_z соответственно, причем отношение g_y/g_z зависит от угла падения излучения в призме. Для того, чтобы оптимизировать величину связи, максимизируем нормированный интеграл I_n перекрытия на поверхности призмы [167] между полем резонатора, проникающим в призму и полем излучения:

$$I_n = \frac{\int ds E_l(y, z) E_r(y, z)}{\sqrt{\int ds |E_l(y, z)|^2} \sqrt{\int ds |E_r(y, z)|^2}}.$$

Для фундаментальной моды интеграл может быть посчитан:

$$I_n = \frac{\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{nka\sqrt{n_r^2-1}}{a^2 n_r} + \frac{1}{g_y^2}} \sqrt{\frac{mn_r b/a + nka\sqrt{n_r^2-1}}{a^2 n_r (b/a)^2} + \frac{1}{g_z^2}}}}{\frac{\sqrt{\pi a \sqrt{n_r b/a}}}{\sqrt[4]{nka(mn_r \sqrt{n_r^2-1} b/a + nka(n_r^2-1))}} \sqrt{g_y g_z}} \quad (4.18)$$

и результат продифференцируем по b/a для поиска экстремума. Так как выражение для корня производной I_n слишком громоздкое, разложим его в ряд по m :

$$\frac{b}{a} = \frac{g_z m \left(2a \sqrt[4]{n_r^2-1} \sqrt{\frac{nka}{mn_r}} + g_z \right)}{2a^2} \quad (4.19)$$

Для того, чтобы убедиться, что найденный экстремум является максимумом, возьмем вторую производную (4.18) в точке экстремума. Очевидно, что выражение для второй производной меньше нуля:

$$\frac{d^2 I_n}{d(b/a)^2} = \frac{16\pi^2 g_y^2 n_r \sqrt{\frac{nka}{n_r}}}{ag_z \sqrt{\frac{1}{m} nka \sqrt[4]{n_r^2-1}}} - \frac{8\pi^2 g_y^2}{g_z^2}$$

что означает, что точка является максимумом.

Для эффективного возбуждения мод с $p \gg l$ требуется Гаусов входной пучок, распространяющийся под углом к оси xz , и не рассматривается в настоящей работе. Оптимальные параметры не зависят одновременно и от g_y и от g_z , так как сплюснутость резонатора существенно изменяет распределение поля лишь в вертикальной плоскости (4.2). Как можно видеть из (4.3), зависимость связи от сплюснутости резонатора слабая. Для типичных экспериментальных значений величина интеграла перекрытия изменяется лишь на 10% при изменении сплюснутости в 3 раза.

Полученный результат для оптимальной сплюснутости резонатора отличается от аналогичного, полученного в работе [168], в которой предполагалось, что оптимальная связь достигается при равенстве отношений характерных ширин пучка в направлениях осей z и y для лазера и для резонатора на грани призмы. Предложенный в настоящей работе метод является методологически более корректным, так как при решении уравнений связанных мод [167] для коэффициентов связи появляются именно интегралы перекрытия, которые и максимизируются в настоящей работе.

4.2.3 Добротность нагружения

Наличие элемента связи (призмы) приводит к тому, что энергия из резонатора будет излучаться через него. Потери энергии на излучение через призму можно характеризовать

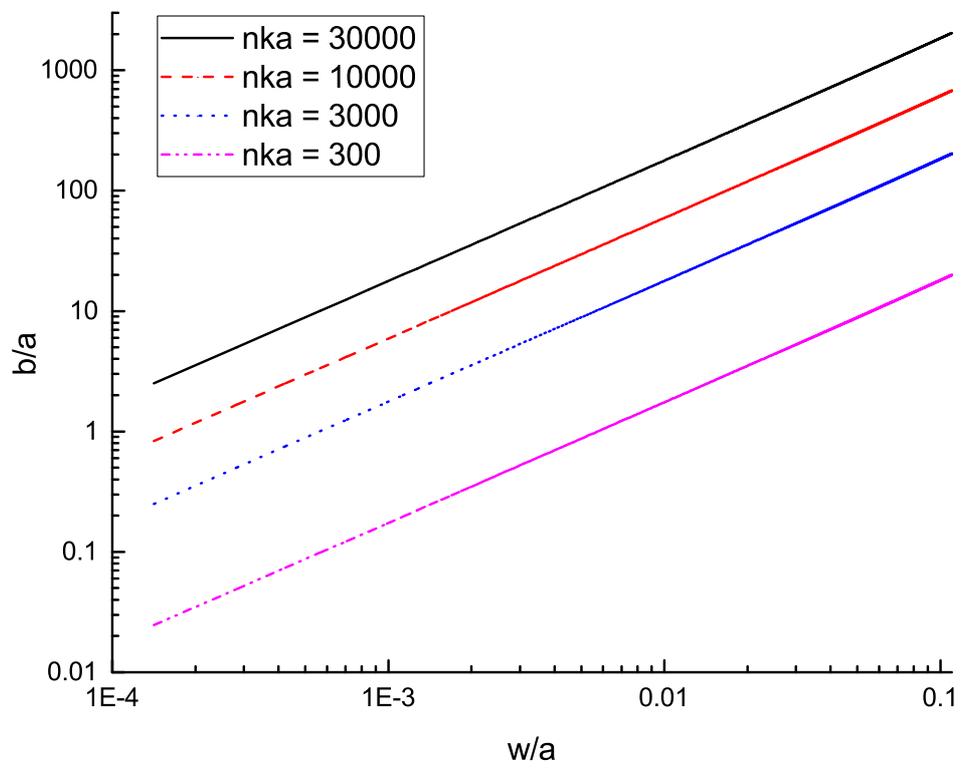


Рис. 4.2: Оптимальная сплюснутость $n_r = 1.4$

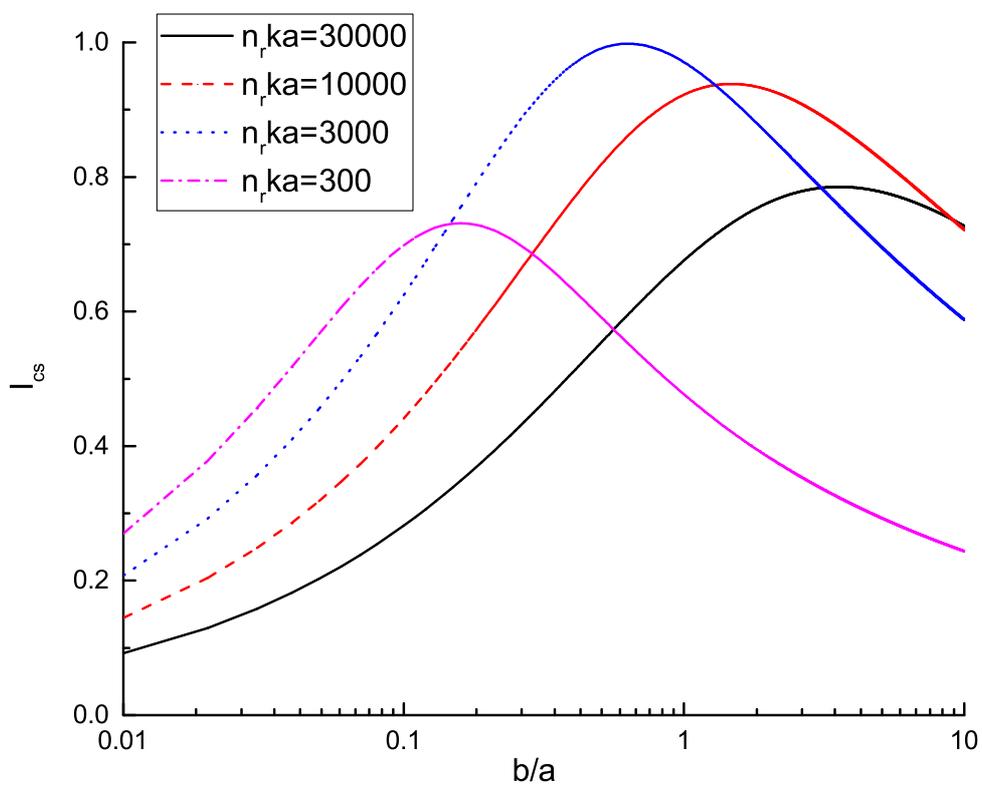


Рис. 4.3: Интеграл перекрытия для фундаментальных мод $a = 100\mu m$, $n_r = 1.4$, $g_z = 1\mu m$, $g_y = 2\mu m$

обратной величиной, которую мы будем называть добротностью нагружения. Сплюснутость резонатора также влияет на добротность нагружения. Найти её можно как отношение внутренней энергии резонатора \mathcal{E} к энергии P , уходящей через призму:

$$Q = \frac{\omega \mathcal{E}}{P}$$

Для того, чтобы найти энергию, уходящую из резонатора в призму, находящуюся на расстоянии d , интегрируется плотность энергии, выходящей из резонатора, причем аналогично предыдущим выкладкам, поверхность призмы считается бесконечной:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_p c}{2\sqrt{\epsilon_p}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 dy dz = \frac{\epsilon_0 n_p c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 dy dz = \\ &= \frac{\epsilon_0 n_p^2 c}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |E(k_y, k_z)|^2 dk_y dk_z = \\ &= \frac{4\pi^3 a b r c_{i,l}^2}{\sqrt{\frac{1}{2} r \sqrt{4b^2 m^2 - a^2} + a^2}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Энергию поля получим из выражения (2.101). Таким образом, добротность нагружения для фундаментальных мод:

$$Q = \frac{n_r^2}{n_p} \left(\frac{2\pi a (n_r^2 - 1)}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{4\pi d \sqrt{n_r^2 - 1}}{\lambda}} \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{n_r^2 - 1}} + \frac{\pi a}{b n_r}}$$

Аналогично для мод с $p \gg l$ энергия, уходящая в призму:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi^3 b J_m'^2 c_{i,m}^2 n_p^2 \epsilon_0 e^{-2dk \sqrt{n_r^2 - 1}}}{k (n_r^2 - 1)^{3/2}} \\ E &= \frac{1}{2} \pi a^2 b c_{i,m}^2 J_m'^2 n_r^2 \epsilon_0 \\ Q &= 2\sqrt{\pi} a^2 k^2 \sqrt{\frac{a}{b}} m e^{2dk_0 \sqrt{n_r^2 - 1}} \left(\frac{(n_r^2 - 1)}{m} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

Полученные выражения совпадают с добротностью для сферы [15] и изменяются со сплюснутостью, что связано с изменением формы области на поверхности призмы, в которую эффективно проникает поле из резонатора. Добротность нагружения, так же как и в случае сферы, экспоненциально зависит от расстояния между резонатором и призмой (4.4), что позволяет легко добиваться оптимального нагружения выбором необходимого расстояния d .

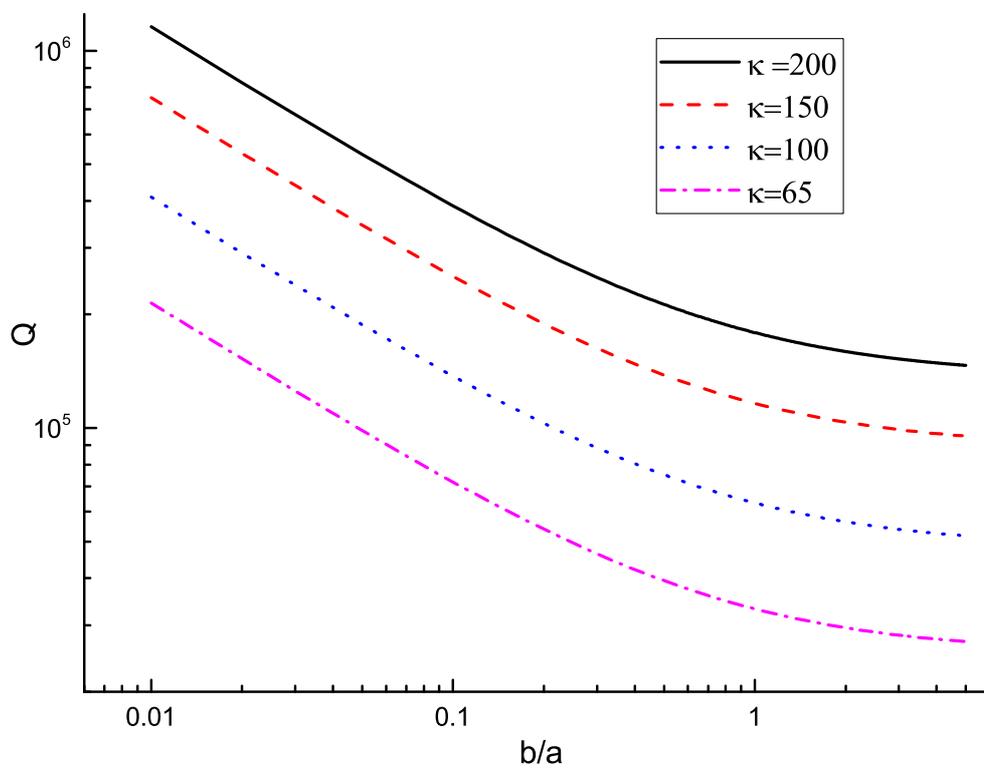


Рис. 4.4: Добротность нагружения фундаментальных мод при $n_r = 1.4$, $n_p = 1.5$, $d = 0$, $\kappa = a/\lambda$

4.2.4 Сдвиг собственных частот

Так как призма находится в области быстро спадающего с расстоянием поля резонатора, то её присутствие влияет на собственные частоты резонатора. Соответствующий малый сдвиг частот может быть легко получен при использовании адиабатического инварианта аналогично [169]

$$\frac{\Delta A}{\mathbb{E}} = \frac{\Delta \omega}{\omega}$$

Так как призма достаточно велика, она рассматривается как полупространство. Для того, чтобы найти работу по перемещению призмы из бесконечности на расстояние d , рассмотрим разность энергии при наличии призмы на расстоянии d и при её отсутствии. Предполагая, что выпадающее поле резонатора E_p зависит только от расстояния d , можно получить:

$$\begin{aligned} E_p(d) &= - \int_d^\infty dx \int |E(y, z)|^2 dS e^{-\frac{2x}{r}} = \\ &= \frac{1}{2} r e^{-\frac{2d}{r}} \int |E(y, z)|^2 dS \end{aligned}$$

Таким образом, $\Delta A = E_p(d)(n_p^2 - 1)$ и

$$\frac{\Delta A}{\mathbb{E}} = \frac{1}{Q_l} \frac{\frac{1}{2} r}{\frac{c}{\omega}} = \frac{1}{Q_l} \frac{kr}{2} = \frac{1}{Q_l} \left(\frac{n_p^2 - 1}{2\sqrt{n_r^2 - 1}} \right) \quad (4.21)$$

4.2.5 Влияние потерь в призме

При наличии потерь в материале призмы часть энергии из резонатора будет поглощаться в ней. Назовем обратную величину этих потерь добротностью призмы. Чтобы её найти, подставим комплексный показатель преломления материала призмы $n_p = n_{pr} + in_{pi}$ в выражение для добротности:

$$Q_{li} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{2\text{Im} \left[\frac{\Delta A}{\mathbb{E}} \right]}$$

Пусть $Q_l = Q_{l0}/n_p$, и тогда мнимая часть

$$\begin{aligned} \text{Im} \left[\frac{\Delta A}{\mathbb{E}} \right] &= \frac{1}{Q_{l0} \sqrt{n_r^2 - 1}} \text{Im} \left[\frac{n_p^2 - 1}{n_p} \right] = \\ &= \frac{1}{Q_{l0} \sqrt{n_r^2 - 1}} n_i \left(\frac{1}{n_{pi}^2 + n_{pr}^2} + 1 \right) \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение для мнимой части в выражение для добротности получим:

$$Q_{li} = Q_l \sqrt{n_r^2 - 1} \frac{n_{pr}}{n_{pi}} \frac{n_{pr}^2 + n_{pi}^2}{n_{pr}^2 + n_{pi}^2 + 1} \quad (4.22)$$

4.3 Заключение

В настоящей работе рассматривалось влияние сплюснутости резонатора на величину связи с призмой и добротность нагружения. Было показано, что распределение поля в призме заметно меняется со сплюснутостью резонатора только в направлении сплюснутости. Наличие сплюснутости резонатора позволяет смягчить требования к наклону резонатора относительно плоскости призмы. Добротность нагружения призмой сплюснутого резонатора слабо зависит от сплюснутости. Также было показано, что выбор оптимальных параметров падающего излучения может увеличить связь на несколько процентов.

Эти результаты опубликованы в [А5].

Глава 5

Стабилизация лазеров с помощью микрорезонаторов с МШГ

5.1 Обзор литературы

5.1.1 Полупроводниковые лазеры

Наиболее распространенным полупроводниковым лазером является лазерный диод, генерация у которого осуществляется за счет рекомбинации электронов и дырок в области р-п перехода, оптически прозрачной для излучения. Показатель преломления среды диодного лазера высок, от 3.5 до 4, а коэффициент отражения от стенок диода около 30%. При этом для получения приемлемой плотности носителей область генерации делается достаточно тонкой, что ведет к большой расходимости пучка, выходящего из диода, вплоть до нескольких десятков градусов. Поэтому часто излучение на выходе лазера собирают линзой. При изготовлении волновода в области генерации либо создают градиент показателя преломления в перпендикулярном распространению излучения направлении либо градиент коэффициента усиления, что реализуется формой электродов. Область свободной дисперсии диодного лазера обычно несколько десятков гигагерц, и при этом он работает в многомодовом режиме.

При эксплуатации полупроводниковых лазеров есть и свои проблемы. Одна из основных – трудности с контролем спектральных характеристик. Стандартный предел точности при установке рабочей длины волны составляет ± 3 нм, что сравнимо с полной шириной на полувысоте линии спектра. При этом длина рабочей волны зависит от температуры: температурный коэффициент, определяющийся отношением $d\lambda/dT$, составляет, примерно, 0.3 нм на 1 градус по Цельсию. Ещё одна проблема диодных лазеров — постепенное смещение рабочих длин волн в длинноволновую часть спектра, из-за чего срок эксплуатации оборудования

ограничивается 10 тысячами часов [170].

Шумы лазера в первую очередь определяются квантовыми шумами, связанными со спонтанным излучением. Каждый испущенный фотон усиливается активной средой лазера, причем, из-за малой добротности резонатора дисперсия фазы выходного сигнала достаточно велика. Так как показатель преломления среды лазера зависит от концентрации носителей, спонтанное излучение также добавляет флуктуации показателя преломления. Большое влияние оказывают флуктуации температуры среды, длины резонатора, показатели преломления, а также релаксационные осцилляции, возникающие из-за конечности времени, требуемого на создание инверсной населенности. Ширина линии нестабилизированного лазера может достигать десятков гигагерц, причем, обычными электронными методами сузить ширину не удается.

Поэтому для сужения спектра используются различные методы: от использования малошумящих источников тока и до заведения части излучения обратно в резонатор для стабилизации и использования схем активной и пассивной стабилизации.

5.1.2 Пассивная стабилизация

5.1.2.1 Стабилизация полупроводниковых лазеров внешним зеркалом

Известно, что ширина линии лазера с удлиненным резонатором (ECDL) квадратично спадает с длиной резонатора [170], поэтому для стабилизации также можно эффективно удлинять резонатор. На этом факте основана идея стабилизации диодного лазера внешним зеркалом. При отражении от пластины или зеркала в резонатор попадает незначительная часть энергии (10^{-6}), которой оказывается достаточно для стабилизации работы диодного лазера. В работах [171], [172] показано, что в зависимости от количества энергии, отражающейся от зеркала, есть несколько режимов работы полупроводникового лазера. При крайне малой обратной связи происходит небольшое сужение линии, определяющееся фазой пришедшей обратно волны от зеркала. При дальнейшем увеличении обратной связи подавляются межмодовые скачки, затем переходящие в одномодовую генерацию узкой линии. Дальнейшее увеличение величины обратной связи сначала приводит к значительному уменьшению длины когерентности, что сопровождается межмодовыми скачками, и уже после некоторой величины связи определяется только параметрами пришедшего обратно в лазер излучения, спектральная ширина которого обычно сужается оптическим резонатором.

В случае стабилизации диодного лазера дополнительной решеткой или зеркалом, можно добиться сужения линии до 200 кГц, [170]. Для дальнейшего уменьшения ширины линии уже используется обратная связь от дополнительного резонатора. Сужения линии лазера можно добиться настройкой частоты лазера на склон резонансной кривой дополнительного резо-

натора и его низкочастотной подстройкой. Обычно медленные флуктуации частоты лазера компенсируются пьезоэлементом на одном из зеркал, а быстрые флуктуации, частотой до нескольких МГц, компенсируются с помощью модуляции тока накачки.

5.1.3 Активная стабилизация

5.1.3.1 Метод Паунда-Драйвера-Холла

Метод Паунда-Драйвера-Холла (ПДХ) основан на детектировании низкочастотной составляющей амплитудно модулированного сигнала лазера, отраженного от резонатора. При этом, в зависимости от типа лазера, механизм его модуляции может быть различным: модуляция инжекционного тока для диодных лазеров и электрооптический или акустооптический для других типов. При амплитудной модуляции каждая из трех частотных составляющих сигнала отражается от резонатора Фабри-Перо с определенной фазой и амплитудой, и результирующая отраженная низкочастотная составляющая суммарного сигнала имеет антисимметричный вид, пригодный для генерации сигнала ошибки. Сигнал ошибки подается на элемент управления отстройкой частоты лазера.

Схема ПДХ при этом обладает рядом преимуществ по сравнению с другими методами, так как слабо зависит от ширины полосы резонатора, подавляет амплитудные флуктуации и применима в широких диапазонах и при достаточно больших расстройках лазера и резонатора.

Метод ПДХ может быть использован не только как схема стабилизации лазера резонатором, но так же в качестве контроля за уходом частоты резонатора при условии, что лазер является более стабильным.

С помощью метода ПДХ можно привязать лазер к резонатору Фабри-Перо с точностью более чем 0.1Гц. Ширина линии лазера при этом становится ограничена термическими и механическими шумами резонатора, на который стабилизируется лазер. Лучших результатов (ширина линии менее 40мГц) удалось добиться при стабилизации волоконного лазера монокристаллическим резонатором Фабри-Перо, поддерживаемого при криогенной температуре [173].

В качестве эталона, к которому привязывается частота лазера, может также выступать резонатор с МШГ. В работе продемонстрирована схема [174], в которой лазер, стабилизированный на Рубидиевой ячейке, привязывался к высокочастотному резонатору ($Q \approx 210^8$, 3.8МГц) с помощью схемы ПДХ. Итоговая ширина линии составила 206КГц, что составляет 5.4% процента от ширины линии лазера и 3.4% от ширины линии резонатора.

Для стабилизации диодных лазеров часто применяется комбинация нескольких методов: в работе [175] представляется простой компактный диодный лазер с внешним зеркалом в кон-

фигурации Литрова (стабилизированный отражательной дифракционной решеткой с зеркалом), стабилизированный резонатором Фабри-Перо, с перестройкой на 3ГГц с узкой линией в 59 кГц.

Резонаторы с МШГ так же успешно применялись для предстабилизации излучения диода, которое затем подается на резонатор Фабри-Перо с еще более узкой линией. Это требовалось, так как ширина полосы резонатора Фабри-Перо оказывалась значительно меньше ширины полосы диодного лазера, что вносило большие искажения в сигнал ошибки для Метода ПДХ и требовало широкополосной петли обратной связи. В работе [176] для стабилизации ECDL лазера с шириной линии около 200кГц на времени усреднения 50мс был предложен кристаллический резонатор из MgF_2 с добротностью 10^9 , соответствующей ширине линии около 100кГц, который с помощью метода ПДХ привязывался к частоте лазера. Затем также с помощью ПДХ лазер привязывался к резонатору Фабри-Перо, имеющему ширину линии около 10кГц, что дало возможность стабилизировать лазер до субкилогерцового уровня и снизить дисперсию Алана на полтора порядка на временах вплоть до десятков минут относительно нестабилизированного лазера.

5.1.3.2 Метод Хэнша-Куйо

Метод Хэнша-Куйо основан на детектировании изменения поляризации в зависимости от отстройки частоты лазера от резонатора. Основным компонентом в данной схеме является полярирующий компонент, помещенный, в оригинале, в резонатор Фабри-Перо, формирующий частотно зависимое изменение поляризации. При прохождении резонатора перпендикулярная компонента не пропускается полярирующим элементом и отражается от входного зеркала резонатора, амплитуда параллельной компоненты же зависит от расстройки частоты резонатора и частоты падающего излучения. Таким образом, линейно поляризованное излучение лазера, меняющее поляризацию на круговую при отсутствии расстройки после отражения от резонатора, при наличии расстройки становится эллиптически поляризованным. Впоследствии, степень эллиптичности дает сигнал ошибки, пропорциональный расстройке, подающийся обратно на лазер.

Этот метод используется для поляризационной спектроскопии в резонаторах с МШГ [177]. Поляризация лазера подбирается таким образом, чтобы только малая часть излучения с соответствующей поляризацией попадала в РШГ, а остальная часть излучения проходила без изменений. После резонатора обычно устанавливается четвертьволновая пластина, с последующим поляризационным делителем, с которого излучение попадает на детекторы. Разность интенсивностей на детекторах позволяет определить отстройку частоты лазера и резонатора [178].

Этот метод активно применяется в экспериментах по оптомеханике в РШГ для достиже-

ния большей чувствительности детектирования механических колебаний, так как позволяет не использовать активную стабилизацию, добавляющую технические шумы, и разделить по поляризациям излучение для генерации сигнала ошибки лазера и сигнал, несущий информацию [179].

Также этот метод используется для подстройки частоты лазера на частоту резонатора при изготовлении модуляторов на РШГ [180]. При этом также модулируемый сигнал и сигнал ошибки будут разделены по поляризациям.

5.1.4 Стабилизация лазера микрорезонатором с МШГ

Стабилизация лазерных диодов с помощью оптических микрорезонаторов носит важный прикладной характер для задач спектроскопии, телекоммуникации, фотоники. Размер полностью собранного устройства может быть достаточно малым, вплоть до нескольких нескольких кубических сантиметров, причем стабильность полученной системы - достаточно высокой [181].

Работы в данном направлении ведутся, в основном, в экспериментальной области. Одним из пионеров является компания OEwaves: ими разрабатываются и продаются стабилизированные резонатором с МШГ лазерные диоды на чипе с хорошими характеристиками.

На сегодняшний день не существует простой и четко разработанной аналитической теории затягивания лазера резонатором с МШГ, предсказывающей одновременно такие основные параметры затягивания, как ширину полосы затягивания и стабильность затянутого лазера. Одна из наиболее актуальных работ, в которой теоретически проанализирована система уравнений лазера и резонатора с МШГ, была сделана в 2003 году Величанским В. Л. [182]. В данной работе рассматривалась система из 4-х уравнений: уравнение медленно меняющейся амплитуды (ММА) для моды лазера, два уравнения ММА для прямой и обратной мод резонатора, связанных друг с другом за счет рассеяния излучения из моды, распространяющейся в прямом направлении, в моду с противоположным направлением распространения. В работе были аналитически получены результаты для стабильности частоты затянутого лазера, но аналитически ширина полосы затягивания не рассматривалась.

Основным отличием настоящей работы является попытка описать систему более просто, используя меньшее количество параметров лазера, но при этом сохранив основные особенности системы. За счет более простого описания можно получить аналитическое выражение для ширины полосы затягивания, которое в дальнейшем необходимо как для фундаментальных исследований, так и для прикладных проблем. В частности, ширина полосы затягивания важна при выборе параметров схемы для генерации оптических солитонов в резонаторах с нормальной дисперсией групповой скорости [183].

Для того, чтобы описать воздействие обратной волны в резонаторе на лазер используется

ранее полученное в работе [184] выражение для отраженной волны, зависящее только от параметров падающего на резонатор излучения, параметров резонатора и коэффициента связи прямой и обратной моды.

5.2 Расчет параметров стабилизации

5.2.1 Обратное рассеяние и отражение от резонатора с МШГ

Рассеяние в обратную моду определяется многими факторами, в частности, оно может быть вызвано рэлеевским рассеянием, шероховатостями поверхности [184], наличием диэлектрических тел вблизи поверхности резонатора [185]. Количественно коэффициент связи может быть получен из [184]:

$$\beta_{jk} = \beta = \frac{\omega_0}{2n^2} \left[\int dv \vec{e}_j^* \delta_\epsilon \vec{e}_k \right] / \left[\int |\vec{e}_j|^2 dv \right] \quad (5.1)$$

где \vec{e}_j и \vec{e}_k — моды, распространяющиеся в противоположном направлении, δ_ϵ — вариация диэлектрического показателя.

В случае рэлеевского рассеяния δ_ϵ легко находится из термодинамики, для шероховатостей оно определяется усредненным размером шероховатости на поверхности.

В случае диэлектрических тел с ним взаимодействует вытекающее из резонатора поле. Кроме того, в работе [185] экспериментально было обнаружено, что при поднесении острия резонансная кривая превращается в дублет. Этот эффект связан с тем, что с увеличением рассеяния поглощение энергии обратной волной тоже увеличивается. Этот эффект является аналогией эффекта Парселла для связанных мод резонатора.

В работе [186] численно исследовалась связь при наличии обратной волны, и было показано, что ее наличие изменяет условия максимальной связи. Нагружение при этом должно быть не критическим, а немного меньшим.

5.2.2 Полная система уравнений для стабилизации

Для стабилизации диодного лазера с помощью резонатора с МШГ используется стандартная схема (5.1): лазер, РШГ и элемент связи с ним. Стабилизация диодного лазера с помощью РШГ описывается системой четырех уравнений, учитывающей множество эффектов, в частности, динамику инверсной населенности среды лазера:

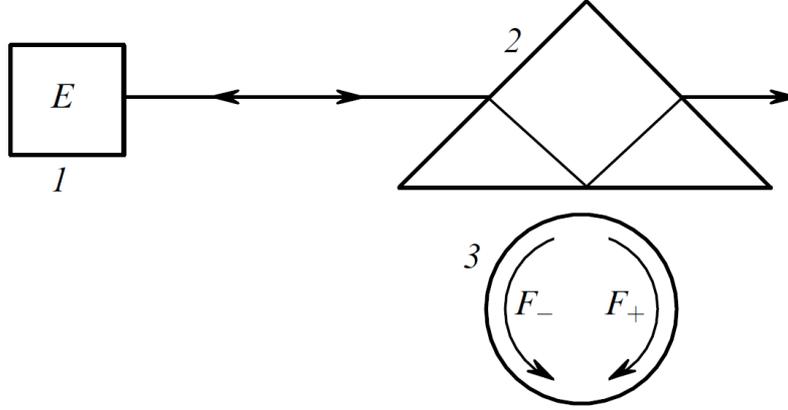


Рис. 5.1: Схема эксперимента по стабилизации лазера

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} + \left(i(\tilde{\Omega} - \omega_l(n_i)) + \delta_l - G(n_i) \right) \tilde{A} = K_1 A_{rm} (t - \tau_d/2) \exp(i\omega\tau_d/2), \quad (5.2)$$

$$\frac{dn_i}{dt} + \frac{1}{\tau_s} n_i = J - G(n_i) \frac{|\tilde{A}|^2}{8\pi\eta\tilde{\Omega}}, \quad (5.3)$$

$$\frac{dA_{rm}}{dt} + \left(i(\tilde{\Omega} - \omega_{rm}) + \delta_0 + \delta_c \right) A_{rm} = i\beta A_{rp}, \quad (5.4)$$

$$\frac{dA_{rp}}{dt} + \left(i(\tilde{\Omega} - \omega_{rp}) + \delta_0 + \delta_c \right) A_{rp} = i\beta A_{rm} + K_2 \tilde{A} (t - \tau_d/2) \exp(i\omega\tau_d/2), \quad (5.5)$$

где τ_s — время релаксации инверсной населенности, J — плотность тока накачки, η — КПД лазера, n_i — инверсия населенности, \tilde{A} , A_{rp} и A_{rm} — амплитуда моды лазера, амплитуда моды резонатора, распространяющаяся в прямом направлении, и амплитуда обратной моды, K_1 и K_2 — коэффициенты связи полей в лазере и в резонаторе, τ_d время прохождения от лазера к резонатору и обратно, ω_{rm} и ω_{rp} — собственные частоты мод, распространяющихся в прямом и обратном направлениях, δ_0 и δ_l собственное затухание моды резонатора и затухание, связанное со связью. Предположим, что добротности мод, распространяющихся в прямом направлении и в обратном одинаковы.

Несмотря на упрощенное рассмотрение динамики лазерной генерации в системе (5.2),(5.3),(5.4),(5.5), она не является тривиальной и достаточно ресурсоемкая для численного анализа ее динамики.

5.2.3 Отражение от резонатора

Задача нахождения амплитуды и фазы отраженной от РШГ волны была рассмотрена ранее в [184]. Комплексная амплитуда отраженного излучения как функция частоты и падающей

амплитуды поля может быть получена как:

$$B_r = -\tilde{A} \frac{i2\delta_c\beta}{(\delta_0 + \delta_c)^2 + \beta^2 - \Delta\omega^2 + i2\Delta\omega(\delta_0 + \delta_c)} \quad (5.6)$$

где $\Delta\omega = \Omega - \omega_r$. В зависимости от коэффициента связи мод β вид зависимости может быть различным: зависимость от $\Delta\omega$ может иметь как один, так и два максимума (5.2).

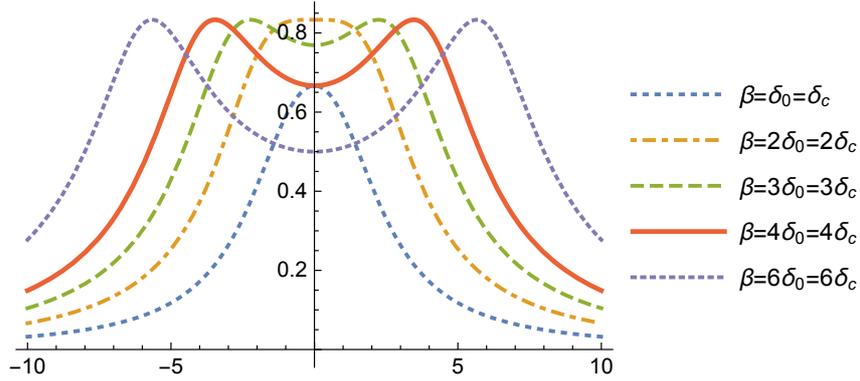


Рис. 5.2: Зависимость амплитуды отраженного поля от частоты

При описании системы для стабилизации лазера использование отражения в таком виде позволяет существенно упростить систему, считая пришедшее от РШГ поле обратно в лазер известным.

5.2.4 Уравнение медленно меняющейся амплитуды для лазера

Для более простого описания системы сведем систему уравнений (5.2),(5.3),(5.4),(5.5) к одному единственному уравнению. При этом пренебрежем:

1. Сложной зависимостью показателя преломления и усиления среды лазера, предполагая их зависящими только от интенсивности поля. Это означает, что происходящие в среде лазера процессы считаем бесконечно быстрыми.
2. Отличием амплитуды лазера в момент времени t и $t + \tau_d$, что не существенно при рассмотрении стационарного случая

Рассмотрим укороченное уравнение амплитуды без стабилизации.

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} + \left(i\Delta\omega_l(\tilde{A}) + \delta_l - G(\tilde{A}) \right) \tilde{A} = 0 \quad (5.7)$$

$$G(\tilde{A}) = G_0(1 - g\tilde{A}^2) \quad (5.8)$$

$$\omega_l(\tilde{A}) = \omega_{l0}(1 - h\tilde{A}^2) \quad (5.9)$$

$$\Delta\omega_l(\tilde{A}) = \tilde{\Omega} - \omega_l(\tilde{A}) \quad (5.10)$$

где \tilde{A} — амплитуда поля, g и h — коэффициент нелинейности усиления среды и нелинейности частоты в зависимости от амплитуды поля, G_0 и ω_{l0} коэффициент усиления среды и собственная частота холодного лазера, $\tilde{\Omega}$ — генерируемая частота и δ_l — потери в резонаторе лазера. При этом стационарным решением будут:

$$\tilde{A}_s^2 = \left(1 - \frac{\delta_l}{G_0}\right) \frac{1}{g} \quad (5.11)$$

$$\tilde{\Omega}_s = \omega_{l0} \left(1 - \frac{h}{g} \left(1 - \frac{\delta_l}{G_0}\right)\right) \quad (5.12)$$

Добавим в уравнение (5.12) выражение для отраженного от резонатора с МШГ поля (5.6):

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} + \left(i\Delta\omega_l(\tilde{A}) + \delta_l - G(\tilde{A})\right) \tilde{A} = i\tilde{T}B_r e^{-i\tilde{\Omega}\tau_d}, \quad (5.13)$$

Рассматривая стационарный случай получим 2 уравнения, для действительной и мнимой части, и перенося набег фаз в левую часть уравнения, получим:

$$\Delta\omega_l(\tilde{A}) \cos(\tilde{\Omega}\tau_d) + (\delta_l - G(\tilde{A})) \sin(\tilde{\Omega}\tau_d) = -2\tilde{T}\tilde{\delta}_c\tilde{\beta} \frac{2\Delta\omega(\delta_0 + \tilde{\delta}_c)}{((\delta_0 + \delta_c)^2 + \tilde{\beta}^2 - \Delta\omega^2)^2 + 4\Delta\omega^2(\delta_0 + \tilde{\delta}_c)^2} \quad (5.14)$$

$$-\Delta\omega_l(\tilde{A}) \sin(-\tilde{\Omega}\tau_d) + (\delta_l - G(\tilde{A})) \cos(\tilde{\Omega}\tau_d) = 2\tilde{T}\tilde{\delta}_c\tilde{\beta} \frac{(\delta_0 + \delta_c)^2 + \tilde{\beta}^2 - \Delta\omega^2}{((\delta_0 + \delta_c)^2 + \tilde{\beta}^2 - \Delta\omega^2)^2 + 4\Delta\omega^2(\delta_0 + \tilde{\delta}_c)^2} \quad (5.15)$$

5.2.5 Выбор безразмерных переменных

Для дальнейших вычислений обезразмерим уравнения. Выберем безразмерные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau &= \delta_0 t & A &= \sqrt{g}\tilde{A} \\ \frac{\tilde{\Omega} - \omega_{l0}}{\delta_0} &= \Omega, & \frac{\tilde{\delta}_c}{\delta_0} &= \delta_c \\ \frac{G_0 - \tilde{\delta}_l}{\delta_0} &= G & \frac{\tilde{\beta}}{\delta_0} &= \beta \\ \frac{\omega_{l0}h}{g\delta_0} &= \alpha_i, & \frac{\tilde{T}}{\delta_0} &= T, \\ \frac{\omega_r - \omega_{l0}}{\delta_0} &= \Delta\omega & \frac{G_0}{\delta_0} &= \alpha_r \end{aligned}$$

и с учетом сделанных переобозначений перепишем отстройку и правую часть уравнения (5.13):

$$\Delta\omega = \tilde{\Omega} - \omega_r = \delta_0 \left(\frac{\tilde{\Omega} - \omega_{l0}}{\delta_0} - \frac{\omega_r - \omega_{l0}}{\delta_0} \right) = \Omega - \Delta_\omega \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} i\sqrt{g}B_r \frac{\tilde{T}}{\delta_0} e^{-i\tau} &= -i\tilde{A} \frac{i2\tilde{\delta}_c\tilde{\beta}}{(\delta_0 + \tilde{\delta}_c)^2 + \tilde{\beta}^2 - \Delta\omega^2 + i2\Delta\omega(\delta_0 + \tilde{\delta}_c)} \frac{\tilde{T}}{\delta_0} e^{-i\tau} = \\ &= \frac{2(\tilde{\delta}_c/\delta_0)(\tilde{\beta}/\delta_0)\tilde{A}e^{-i\tau}\tilde{T}/\delta_0}{(1 + \frac{\tilde{\delta}_c}{\delta_0})^2 + \frac{\tilde{\beta}^2}{\delta_0^2} - (\Omega - \frac{\omega_r - \omega_{l0}}{\delta_0})^2 + i2(\Omega - \frac{\omega_r - \omega_{l0}}{\delta_0})(1 + \frac{\tilde{\delta}_c}{\delta_0})} \\ &= \frac{2\delta_c\beta T e^{-i\tau} A}{(1 + \delta_c)^2 + \beta^2 - (\Omega - \Delta_\omega)^2 + i2(\Omega - \Delta_\omega)(1 + \delta_c)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\tilde{\Omega}\tau_d = \tau_d\delta_0\Omega + \omega_{l0}\tau_d = \kappa\Omega + \phi = \tau_d\omega_r Q_r^{-1}\Omega + \phi \quad (5.18)$$

где τ — набег фазы при проходе от лазера к резонатору и обратно. В безразмерном виде уравнение для амплитуды моды можно представить в виде:

$$\frac{dA}{d\tau} + \left[i\Omega - G + (i\alpha_i + \alpha_r)A^2 - \frac{2\delta_c\beta T e^{-i(\kappa\Omega + \phi)}}{(1 + \delta_c)^2 + \beta^2 - (\Omega - \Delta_\omega)^2 + i2(\Omega - \Delta_\omega)(1 + \delta_c)} \right] A = 0 \quad (5.19)$$

В стационарном случае (5.13) и его действительная и мнимая часть будут выглядеть:

$$i\Omega - G + (i\alpha_i + \alpha_r)A^2 - \frac{2\delta_c\beta T e^{-i(\kappa\Omega + \phi)}}{(1 + \delta_c)^2 + \beta^2 - (\Omega - \Delta_\omega)^2 + i2(\Omega - \Delta_\omega)(1 + \delta_c)} = 0 \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} (\Omega + a_i A^2) \cos(\kappa\Omega + \phi) + (-G + a_r A^2) \sin(\kappa\Omega + \phi) - \\ - \frac{2T\delta_c\beta(-2(\Omega - \Delta_\omega)(1 + \delta_c))}{[(1 + \delta_c)^2 + \beta^2 - (\Omega - \Delta_\omega)^2]^2 + 4(\Omega - \Delta_\omega)^2(1 + \delta_c)^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} (-G + a_r A^2) \cos(\kappa\Omega + \phi) + (-\Omega - a_i A^2) \sin(\kappa\Omega + \phi) - \\ - \frac{2T\delta_c\beta((1 + \delta_c)^2 + \beta^2 - (\Omega - \Delta_\omega)^2)}{[(1 + \delta_c)^2 + \beta^2 - (\Omega - \Delta_\omega)^2]^2 + 4(\Omega - \Delta_\omega)^2(1 + \delta_c)^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Из полученной системы уравнений легко выражается амплитуда A от частоты Ω

$$A = \frac{2\beta T\delta_c(\beta^2 + (\delta_c + 1)^2 - (\Omega - \Delta_\omega)^2)}{(\beta^2 + (\delta_c + 1)^2 - (\Omega - \Delta_\omega)^2)^2 + 4(\delta_c + 1)^2(\Omega - \Delta_\omega)^2} + \frac{G \cos(\kappa\Omega + \phi) + \Omega \sin(\kappa\Omega + \phi)}{\alpha_r \cos(\kappa\Omega + \phi) - \alpha_i \sin(\kappa\Omega + \phi)}$$

что позволяет получить уравнение $F(\Delta_\omega, \Omega)$ относительно частоты Ω . Данное уравнение плохо поддается точному аналитическому анализу ввиду того, что Ω входит в него в пятой степени, а Δ_ω — в четверной.

Характерный вид решений уравнения можно увидеть на графиках (5.4), (5.3).

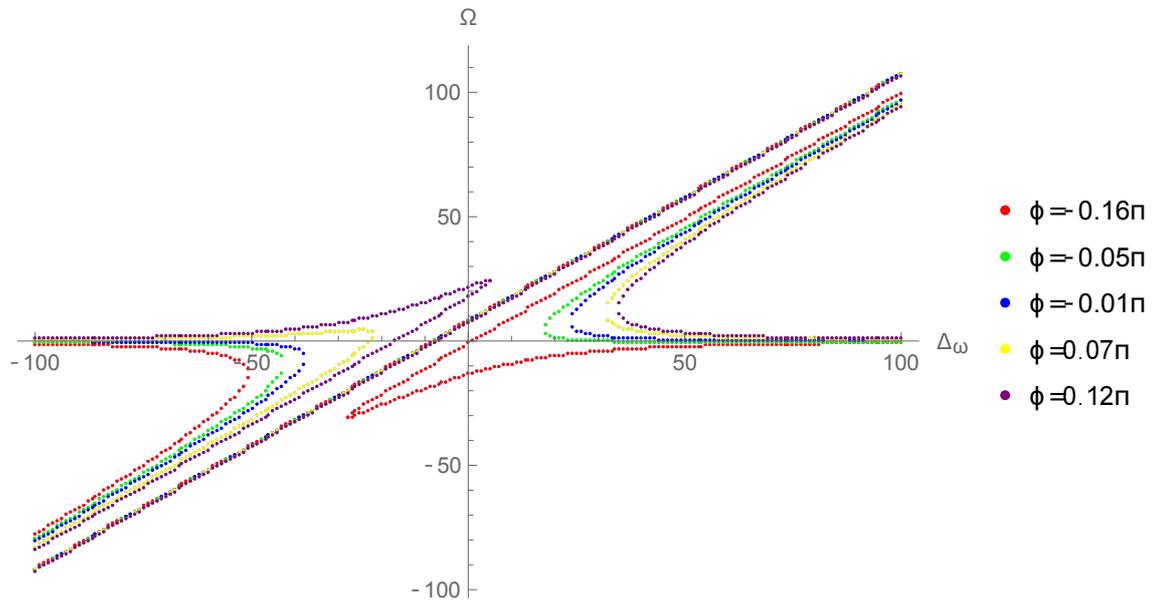


Рис. 5.3: Зависимость генерируемой Ω частоты от отстройки с затягиванием $\Delta\omega$ от ϕ при $\kappa = \delta_0/(3 \cdot 10^9)$, $G_0 = 4 \cdot 10^{10} \text{с}^{-1}$, $\tilde{\delta}_l = 3.9 \cdot 10^{10} \text{рад/с}$, $\tilde{\delta}_c = \delta_0$, $g = 10^{-2} \text{м/В}$, $h = 10^{-8} \text{м/В}$, $\tilde{\beta} = 10^6 \text{рад/с}$, $\tilde{T} = 10^{12} \text{рад/с}$, $\omega_{l0} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{рад/с}$

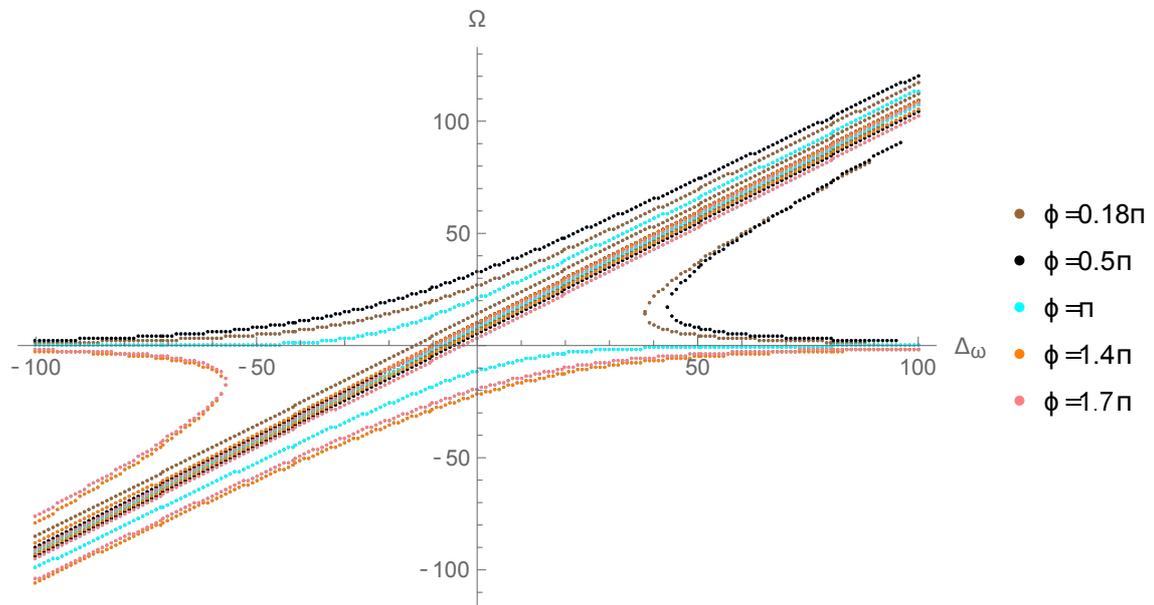


Рис. 5.4: Зависимость генерируемой Ω частоты от отстройки без затягивания $\Delta\omega$ от ϕ при $\kappa = \delta_0/(3 \cdot 10^9)$, $G_0 = 4 \cdot 10^{10} \text{с}^{-1}$, $\tilde{\delta}_l = 3.9 \cdot 10^{10} \text{рад/с}$, $\tilde{\delta}_c = \delta_0$, $g = 10^{-2} \text{м/В}$, $h = 10^{-8} \text{м/В}$, $\tilde{\beta} = 10^6 \text{рад/с}$, $\tilde{T} = 10^{12} \text{рад/с}$, $\omega_{l0} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{рад/с}$

5.2.6 Стабильность

Стабильностью будем называть отношение изменения генерируемой стабилизированным лазером частоты к изменению разницы собственных частот резонатора лазера и резонатора с МШГ, то есть производную $\tilde{\Omega}$ по Δ_ω при $\Delta_\omega = 0$. Так как уравнение относительно Ω является уравнением 5-ого порядка, и решить его алгебраически не представляется возможным даже при нулевой отстройке Δ_ω , предположим, что $\Omega|_{\Delta_\omega=0} = 0$. Учитывая, что $\tilde{\Omega} = \delta_0\Omega + \omega_{L0}$ и $\omega_{l0} = \omega_r - \Delta_\omega\delta_0$ получим стабильность, выраженную через безразмерные координаты:

$$S = \frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial\omega_{L0}} = \delta_0 \frac{\partial\Omega}{\partial\omega_{L0}} + 1 = \delta_0 \frac{\partial\Omega}{\partial\Delta_\omega} \frac{\partial\Delta_\omega}{\partial\omega_{L0}} + 1 = 1 - \frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial\Delta_\omega} = 1 + \left. \frac{F_{\Delta_\omega(\Delta_\omega, \tilde{\Omega})}}{F_{\Omega(\Delta_\omega, \tilde{\Omega})}} \right|_{\Delta_\omega=0, \tilde{\Omega}=0} \quad (5.23)$$

Вычисляя производные $F(\Delta_\omega, \Omega)$ получим стабильность:

$$\begin{aligned} S &= 1 + [4\beta T \delta_c (\delta_c + 1) (\alpha_i \sin(\phi) - \alpha_r \cos(\phi))] / [\alpha_r ((\beta^2 + \delta_c (\delta_c + 2) + 1)^2 + \\ &\quad + 2\beta T \delta_c \cos(\phi) (\beta^2 \kappa + \delta_c (\kappa \delta_c + 2\kappa + 2) + \kappa + 2)) - \\ &\quad - 2\beta T \delta_c \alpha_i \sin(\phi) (\beta^2 \kappa + \delta_c (\kappa \delta_c + 2\kappa + 2) + \kappa + 2)] = \\ &= 1 - [4\beta T \delta_c (\delta_c + \delta_0) (gG_0 \cos(\phi) - h\omega_{l0} \sin(\phi))] / [gG_0 ((\beta^2 + (\delta_c + \delta_0)^2)^2 + \\ &\quad + 2\beta T \delta_c \cos(\phi) (\tau_d (\beta^2 + (\delta_c + \delta_0)^2) + 2(\delta_c + \delta_0))) - \\ &\quad - 2\beta hT \delta_c \omega_{l0} \sin(\phi) (\tau_d (\beta^2 + (\delta_c + \delta_0)^2) + 2(\delta_c + \delta_0))] \end{aligned} \quad (5.24)$$

При оптимальной связи $\delta_0 = \delta_c$

$$\begin{aligned} S_{opt} &= 1 - \frac{8\beta T (\alpha_i \sin(\phi) - \alpha_r \cos(\phi))}{2\beta T ((\beta^2 + 4)\kappa + 4) \alpha_i \sin(\phi) - \alpha_r ((\beta^2 + 4)^2 + 2\beta T ((\beta^2 + 4)\kappa + 4) \cos(\phi))} = \\ &= 1 + \frac{8\delta_0^2}{\frac{gG_0(\beta^2 + 4\delta_0^2)^2}{\beta T (h\omega_{l0} \sin(\phi) - gG_0 \cos(\phi))} - 2\delta_0 ((\beta^2 + 4\delta_0^2) \tau_d + 4\delta_0)} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Как легко заметить из графика (5.5), полученное выражение для стабильности качественно совпадает с выражением, полученным численным решением системы уравнений (5.19). При этом стабильность увеличивается с увеличением добротности резонатора Q_{res} (5.6).

5.2.7 Полоса затягивания

Для того, чтобы при отсутствии обратной связи $\tilde{\Omega}$ стремилась к нулю, сделаем еще одно преобразование:

$$\Omega = \alpha_i \left(1 - \frac{\alpha_r - G}{\alpha_r} \right) + \bar{\Omega}, \quad (5.26)$$

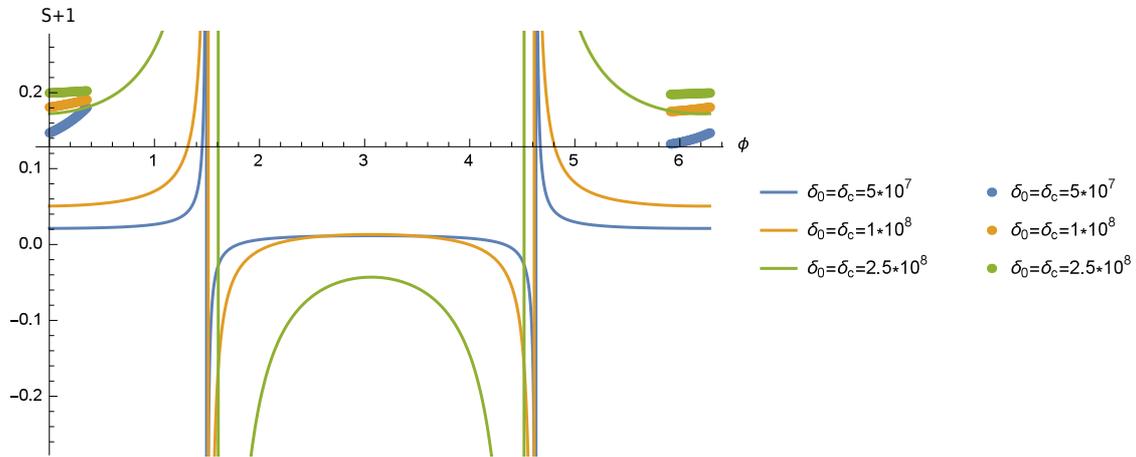


Рис. 5.5: Зависимость стабильности от ϕ при $\kappa = \delta_0 / (3 \cdot 10^9)$, $G_0 = 4 \cdot 10^{10} \text{с}^{-1}$, $\tilde{\delta}_l = 3.9 \cdot 10^{10} \text{рад/с}$, $\tilde{\delta}_c = \delta_0$, $g = 10^{-2} \text{м/В}$, $h = 10^{-8} \text{м/В}$, $\tilde{\beta} = 10^6 \text{рад/с}$, $\tilde{T} = 10^{12} \text{рад/с}$, $\omega_{l0} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{рад/с}$. Точки — численно полученные значения, тонкие линии — рассчитанные по формуле.

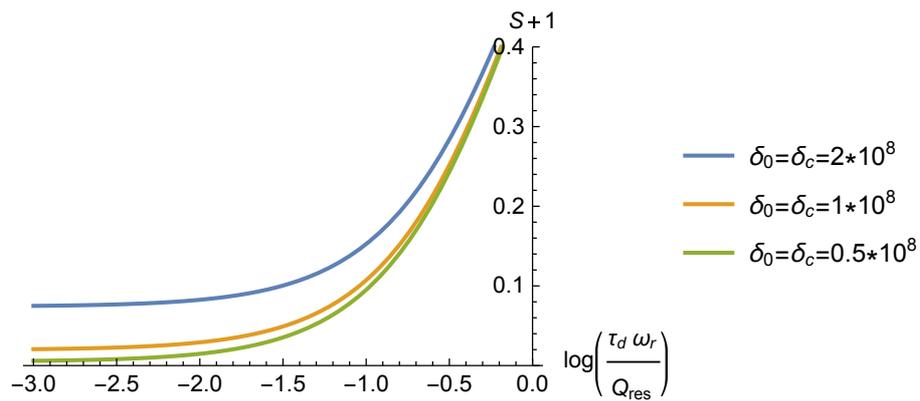


Рис. 5.6: Зависимость стабильности от κ при $G_0 = 4 \cdot 10^{10} \text{с}^{-1}$, $\tilde{\delta}_l = 3.9 \cdot 10^{10} \text{рад/с}$, $\tilde{\delta}_c = \delta_0$, $g = 10^{-2} \text{м/В}$, $h = 10^{-8} \text{м/В}$, $\tilde{\beta} = 10^6 \text{рад/с}$, $\tilde{T} = 10^{12} \text{рад/с}$, $\omega_{l0} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{рад/с}$, $\phi = 0$

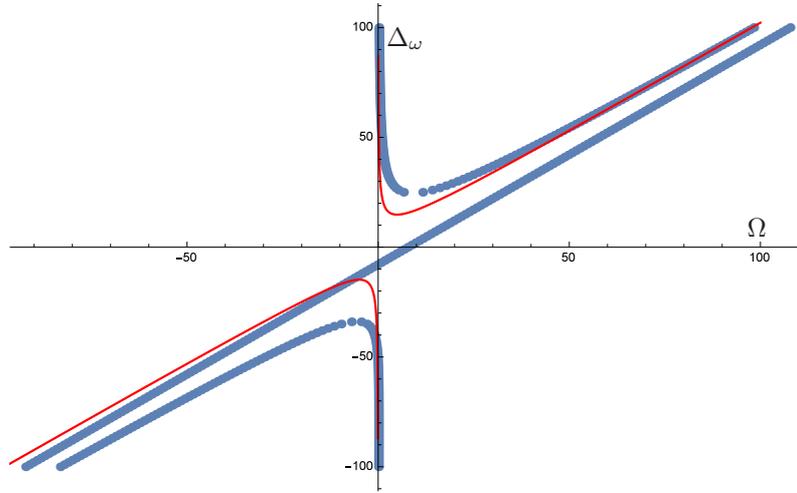


Рис. 5.7: Зависимость отстройки от генерируемой частоты при параметрах $G_0 = 4 \cdot 10^{10} \text{с}^{-1}$, $\delta_l = 3.9 \cdot 10^{10} \text{рад/с}$, $\tilde{\delta}_c = \delta_0$, $g/h = 10^6 \text{м/В}$, $\beta = 10^6 \text{рад/с}$, $T = 10^{12} \text{рад/с}$, $\delta_0 = 10^7 \text{рад/с}$, $\omega_{l0} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{рад/с}$. Синяя кривая — численный расчет, красная - аппроксимация с помощью (5.27)

где $\bar{\Omega}$ будет искомой смещенной частотой генерации. Вид решений легко проследить из графика (5.7) (по оси x генерируемая частота, по оси y расстройка). Будем искать решение уравнения $F(\bar{\Omega}, \Delta_\omega)$ в виде $\Delta_\omega = -\bar{\Omega} + \zeta/\bar{\Omega}^\alpha$. Так как уравнение имеет четвертый порядок по Δ_ω и пятый порядок по $\bar{\Omega}$, для нахождения α достаточно перебрать делители числа 4. Среди рассмотренных вариантов вид решения

$$\Delta_\omega = \gamma + \frac{\zeta}{\sqrt{\bar{\Omega}}} - \bar{\Omega} \quad (5.27)$$

дает наилучший результат. Подставляя его в таком виде в $F(\Omega_s, \Delta_\omega)$ можно получить ряд по $\bar{\Omega}$:

$$F(\Omega_s, \Delta_\omega) = \frac{\alpha_r \left(2\beta\zeta^2 T \delta_c \alpha_i \alpha_r^3 \cos\left(\phi - \frac{G\kappa\alpha_i}{\alpha_r}\right) - \alpha_r^4 \left(\zeta^4 - 2\beta\zeta^2 T \delta_c \sin\left(\phi - \frac{G\kappa\alpha_i}{\alpha_r}\right) \right) \right)}{\Omega_s} + O(1/\sqrt{\Omega_s}) + O(\sqrt{\Omega_s}) + \dots$$

Так как затягивание наблюдается при малых $\bar{\Omega}$, обнуллим старший коэффициент при Ω_s^{-1} , играющий решающую роли в области $\bar{\Omega} \rightarrow 0$, получим:

$$\zeta = \pm \sqrt{2} \sqrt{\beta T \delta_c \sin\left(\phi - \frac{G\kappa\alpha_i}{\alpha_r}\right) + \beta T \delta_c \alpha_i / \alpha_r \cos\left(\phi - \frac{G\kappa\alpha_i}{\alpha_r}\right)} \quad (5.28)$$

и, подставляя в уравнение для Δ_ω , можно получить полуширину линии затягивания:

$$\begin{aligned}\Delta_{lock} &= 3 \cdot 2^{2/3} \sqrt[3]{\beta T \delta_c \left(\sin \left(\phi - \frac{Gk\alpha_i}{\alpha_r} \right) + \alpha_i / \alpha_r \cos \left(\phi - \frac{Gk\alpha_i}{\alpha_r} \right) \right)} = \\ &= 3 \cdot 2^{2/3} \sqrt[3]{\frac{\beta T \delta_c \left(gG_0 \sin \left(\frac{h\tau_d \omega_{l0}(\delta_l - G_0)}{gG_0} + \phi \right) + h\omega_{l0} \cos \left(\frac{h\tau_d \omega_{l0}(\delta_l - G_0)}{gG_0} + \phi \right) \right)}{\delta_0^3 g G_0}}\end{aligned}\quad (5.29)$$

Так как в выражении присутствует квадратный корень, оно действительно не при любых значениях подкоренного выражения. К сожалению, полученные выражения для ширины по-

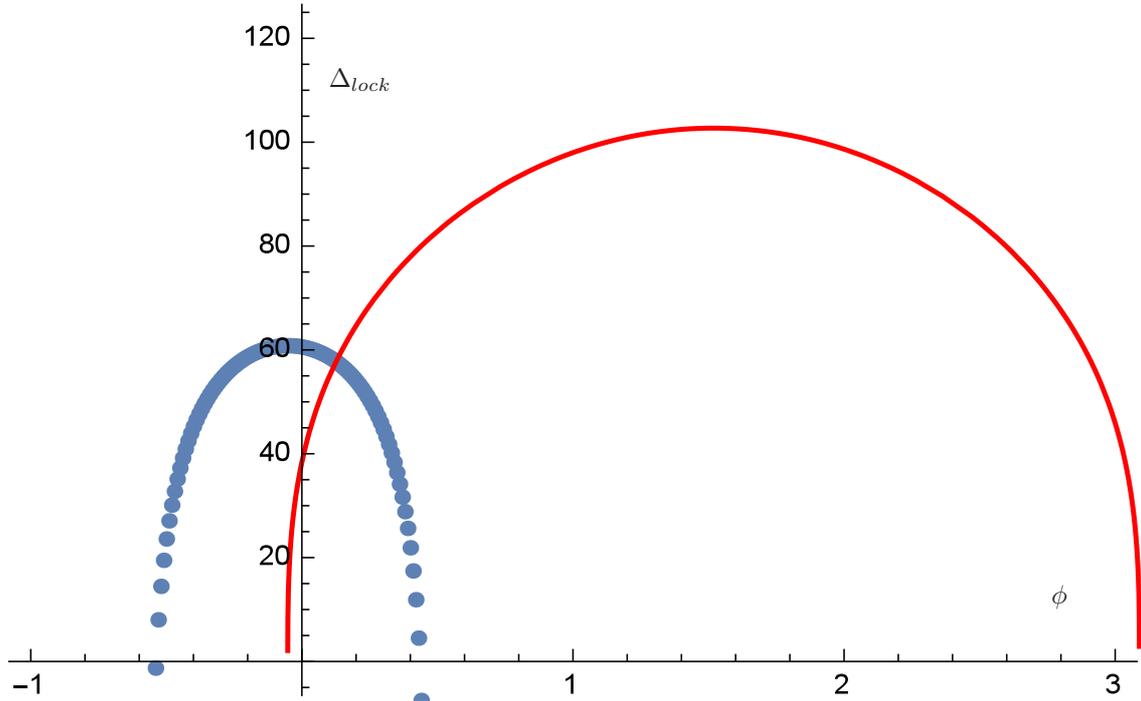


Рис. 5.8: Синяя — численно полученная ширина полосы затягивания, красная — с помощью полученной формулы в зависимости от ϕ : $G_0 = 4 \cdot 10^{10} \text{с}^{-1}$, $\delta_l = 3.9 \cdot 10^{10} \text{рад/с}$, $\tilde{\delta}_c = \delta_0$, $g = 10^{-2} \text{м/В}$, $h = 10^{-8} \text{м/В}$, $\tilde{\beta} = 10^6 \text{рад/с}$, $\tilde{T} = 10^{12} \text{рад/с}$, $\omega_{l0} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{рад/с}$, $\phi = 0$, $\delta_0 = 10^7 \text{рад/с}$

лосы не корректно зависят от набега фазы в свободном пространстве (5.8) и позволяют лишь качественно оценивать величину полосы затягивания.

5.2.8 Устойчивость

Для проверки устойчивости решений предположим, что $A = A_0 + \alpha e^{\lambda t}$, где A_0 стационарное решение уравнения (5.19), α бесконечно малое приращение амплитуды, λ показывает динамику изменения возмущения. Подставив амплитуду в (5.19) и сократив на $\alpha e^{\lambda t}$, получим

уравнение для действительной части λ , определяющей устойчивость:

$$\lambda = 2A_0^2 (\alpha_r \cos(\kappa\Omega + \phi) - \alpha_i \sin(\kappa\Omega + \phi)) \quad (5.30)$$

Для того, чтобы решение было устойчивым, λ должна быть меньше нуля.

В рассмотренной модели стабилизированного лазера устойчивость решения зависит, в первую очередь, от набега фаз τ_d между лазером и резонатором. Параметры лазера α_r и α_i фиксированы для данного лазера, набег же фаз легко варьируется в эксперименте. В зависимости от набега фаз существуют области, где решение безусловно устойчиво или безусловно неустойчиво.

Для проверки наличия устойчивых решений с затягиванием и стабилизацией построим графики этих величин в зависимости от набега фаз при различных значениях a_i . Так как величины стабильности, ширины полосы затягивания и λ имеют разный порядок, на графиках (5.9), (5.10), (5.11) по оси ординат они отложены в относительных единицах.

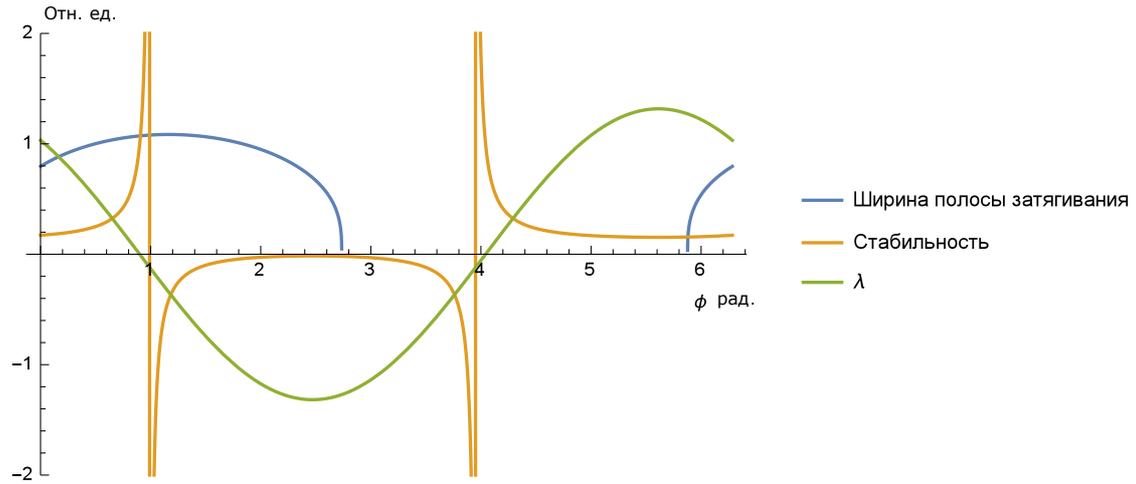


Рис. 5.9: Рассчитанные величины в относительных единицах от набега фаз при $G_0 = 4 \cdot 10^{10} \text{с}^{-1}$, $\tilde{\delta}_l = 3.9 \cdot 10^{10} \text{рад/с}$, $\tilde{\delta}_c = \delta_0$, $g = 10^{-2} \text{м/В}$, $h = 10^{-7} \text{м/В}$, $\tilde{\beta} = 10^6 \text{рад/с}$, $\tilde{T} = 10^{12} \text{рад/с}$, $\omega_{l0} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{рад/с}$, $\phi = 0$

Таким образом видно, что при различных параметрах нелинейности среды лазера существуют устойчивые области с стабилизацией и затягиванием (5.9), (5.10), (5.11).

5.3 Заключение

В рассмотренной модели, несмотря на ее простоту, реализуются все необходимые особенности: и наличие стабилизации и затягивания частоты лазера на моду резонатора. Все аналитически полученные величины согласуются с численными значениями.

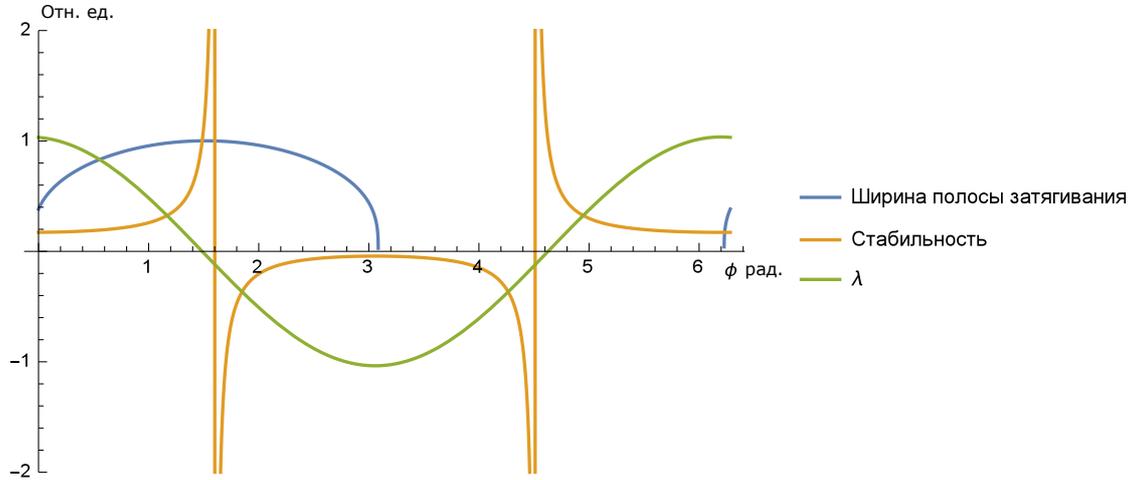


Рис. 5.10: Рассчитанные величины в относительных единицах от набега фаз при $G_0 = 4 \cdot 10^{10} \text{c}^{-1}$, $\tilde{\delta}_l = 3.9 \cdot 10^{10} \text{рад/с}$, $\tilde{\delta}_c = \delta_0$, $g = 10^{-2} \text{М/В}$, $h = 10^{-8} \text{М/В}$, $\tilde{\beta} = 10^6 \text{рад/с}$, $\tilde{T} = 10^{12} \text{рад/с}$, $\omega_{l0} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{рад/с}$, $\phi = 0$

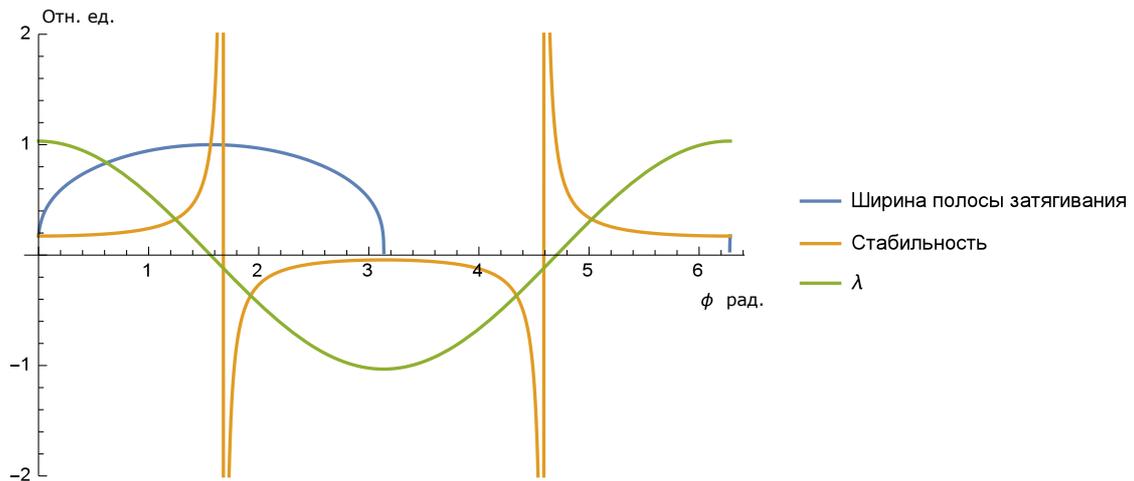


Рис. 5.11: Рассчитанные величины в относительных единицах от набега фаз при $G_0 = 4 \cdot 10^{10} \text{c}^{-1}$, $\tilde{\delta}_l = 3.9 \cdot 10^{10} \text{рад/с}$, $\tilde{\delta}_c = \delta_0$, $g = 10^{-2} \text{М/В}$, $h = 10^{-9} \text{М/В}$, $\tilde{\beta} = 10^6 \text{рад/с}$, $\tilde{T} = 10^{12} \text{рад/с}$, $\omega_{l0} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{рад/с}$, $\phi = 0$

Эти результаты опубликованы в [A6].

Глава 6

Основные результаты работы

1. Для собственных частот сфероидов, тороидов и квартик с модами шепчущей галереи с помощью метода Эйнштейна-Бриллюэна-Келлера был получено уточнение разложения собственных частот по азимутальному индексу моды, позволяющее получить увеличение точности приближения около порядка, а также получены выражения для дисперсии групповой скорости продольных и поперечных мод, согласующиеся с численными расчетами. Было показано, что для собственных частот фундаментальных мод можно получить равномерную аппроксимацию ошибки, улучшающую точность еще на порядок. Для сфероида было получено выражение для распределения оптического поля внутри и снаружи резонатора.
2. С помощью приближенного решения характеристического уравнения и применения адиабатического инварианта удалось получить аналитические выражения для сдвигов собственных частот ТМ и ТЕ мод шепчущей галереи при наличии тонкого слоя диэлектрика на поверхности сферического резонатора. Приближения совпали с результатами, полученными ранее с помощью приближенного решения уравнения Гельмгольца, подтвердив их корректность. Получены выражения для добротности резонатора при наличии поглощения в тонком слое.
3. Для связи сфероидальных резонаторов с призмой получены угловые спектры распространения света в призме и показано, что они отличаются от случая сферы из-за характера распределения поля в резонаторе. Для случая сфероида было получено выражение для оптимального сжатия резонатора и показано, что подбор правильной формы может увеличить величину связи на несколько процентов. Было показано, что с увеличением сжатия резонатора добротность нагружения падает. Было получено приближение для величины добротности потерь в материале призмы с поглощением.

4. Для упрощенной модели стабилизации лазера с нелинейностью среды, пропорциональной интенсивности излучения, резонатором с модами шепчущей галереи, при наличии в нем рэлеевского рассеяния, была показана возможность стабилизации и затягивания. Показано, что в такой модели существуют устойчивые режимы с затягиванием частоты лазера на резонатор, что соответствует экспериментальным данным. Аналитические выражения для стабильности и полосы затягивания, полученные для данной модели, согласуются с численными расчетами.

Литература

- [1] М. Л. Городецкий, Ю. А. Демченко, Д. Ф. Зайцев, В. Н. Крутиков, Ю. М. Золотаревский, and В. Л. Лясковский. Высокодобротные оптические микрорезонаторы с модами типа шепчущей галереи и их применение в прецизионных измерениях. *Метрология*, (12):22–40, 2014.
- [2] V. S. Ilchenko V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky. Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering-gallery modes. *Physics Letters A*, 137(7-8):393–397, 1989.
- [3] P. Del’Haye, T. Herr, E. Gavartin, M.L. Gorodetsky, R. Holzwarth, and T.J. Kippenberg. Octave spanning tunable frequency comb from a microresonator. *Physical Review Letters*, 107:063901, 2011.
- [4] J. A. Stratton. *Electromagnetic theory*. McGrawHill, New York, 1941.
- [5] S. Schiller. Asymptotic expansion of morphological resonance frequencies in Mie scatterernig. *Applied Optics*, 32:2181–2185, 1993.
- [6] V. S. Ilchenko, M. L. Gorodetsky, X. S. Yao, and L. Maleki. Microtorus: a high-finesse microcavity with whispering-gallery modes. *Optics Letters*, 26:256–258, 2001.
- [7] D. K. Armani, T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, and K. J. Vahala. Ultra-high-Q toroid microcavity on a chip. *Nature*, 421:925–928, 2003.
- [8] V. S. Ilchenko, A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, and L. Maleki. Nonlinear optics and crystalline whispering gallery mode cavities. *Physical Review Letters*, 92:043903, 2004.
- [9] M. Pöllinger, D. O’Shea, F. Warcken, and A. Rauschenbeutel. Ultra-high-q tunable whispering-gallery-mode microresonator. *Physical Review Letters*, 103:053901, 2009.
- [10] M. Oxborrow. How to simulate the whispering-gallery-modes of dielectric microresonators in FEMLAB/COMSOL. *Proceedings of SPIE*, 6452:64520J, 2007.
- [11] Kippenberg T. J., R. Holzwarth, and S.A. Diddams. Microresonator-based optical frequency combs. *Science*, 322:555, 2011.

- [12] A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, W. Liang, V. S. Ilchenko, D. Seidel, and L. Maleki. Kerr combs with selectable central frequency. *Nature Photonics*, 5:293–296, 2011.
- [13] Byung Chan Eu Michael L. Sink. A uniform wkb approximation for spheroidal wave functions. *J. Chern. Phys.*, 78(8):2955, 4887.
- [14] P.C. Guaranhio de Moraes, P.C. Soares, and L.G. Guimaraes. Semiclassical theory for the spheroidal angular and radial functions. *SBMO/IEEE MTT-S International*, 7870037:765, 2003.
- [15] V. S. Ilchenko M. L. Gorodetsky. High-q optical whispering-gallery microresonators: precession approach for spherical mode analysis and emission patterns with prism couplers. *Optics Communications*, 113:133–143, 1994.
- [16] Н. С. Григорьева В. М. Бабич. Равномерные асимптотические разложения функций, связанные со сжатым сфероидом. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 34:6–22, 1973.
- [17] Luiz G. Guimaraes Pedro C. G. de Moraes. Semiclassical theory to optical resonant modes of a transparent dielectric spheroidal cavity. *APPLIED OPTICS*, 41(15):2955, 2002.
- [18] Byung Chan Eu Michael L. Sink. Andre g. simao, jose p. r. f. de mendonca, rosana b. santiago, pedro c. g. de Moraes, paulo c. soares, luiz g. guimaraes. *APPLIED OPTICS*, 44(16):3370, 2005.
- [19] K. Vahala. Optical microcavities. *Nature*, 424:839–846, 2001.
- [20] Schiller S. Asymptotic expansion of morphological resonance frequencies in mie scattering. *Appl. Opt.*, 32:2181, 1993.
- [21] G. A. Korn and T. M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill New York/San Francisco/Toronto/London/Sydney, 1968.
- [22] M. Sumetsky. Whispering-gallery bottle microcavities: the three-dimensional etalon. *Optics Letters*, 29:8–10, 2004.
- [23] M. Abramowitz and I.E. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, 1964.
- [24] J.B. Keller and S.I. Rubinow. Asymptotic solution of eigenvalue problems. *Annalen der Physik*, 9:24–75, 1960.
- [25] Быков В.П. Геометрическая оптика трёхмерных колебаний в открытых резонаторах. *сб. Электроника больших мощностей*, 4:21, 1965.

- [26] Fomin A.E. Gorodetsky M. L. Geometrical theory of whispering-gallery modes. *IEEE journal of selected topics in quantum electronics*, 12(1):33, 2006.
- [27] M. L. Gorodetsky and A. E. Fomin. Geometrical theory of whispering gallery modes. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 12:33–39, 2006.
- [28] M. L. Gorodetsky and A. E. Fomin. Eigenfrequencies and q factor in the geometrical theory of whispering-gallery modes. *Quantum Electronics*, 37 (2):167–172, 2007.
- [29] M. L. Gorodetsky. *Optical microresonators with giant quality-factor*. Fizmatlit, 2011.
- [30] M. L. Gorodetsky Y. A. Demchenko. Analytical estimates of eigenfrequencies, dispersion, and field distribution in whispering gallery resonators. *J. Opt. Soc. Am. B*, 30(11), 2013.
- [31] G. Gauglitz J. Homola, S.S. Yee. Surface plasmon resonance sensors: review. *Sensors and Actuators B Chem.*, (54):3–15, 1999.
- [32] J. Homola. Present and future of surface plasmon resonance biosensors. *Analytical and Bioanalytical Chemistry*, (377):528, 2003.
- [33] M. Tabrizian X.D. Hoa, A.G. Kirk. Surface plasmon resonance assay for real-time monitoring of somatic coliphages in wastewaters biosens. *Bioelectron*, (23):151, 2007.
- [34] J. Homola. Surface plasmon resonance sensors for detection of chemical and biological species. *Chemical Reviews*, (108):462, 2008.
- [35] Д.А. Мамичев, И.А. Кузнецов, Н.Е. Маслова, and М.Л. Занавескин. Оптические сенсоры на основе поверхностного плазмонного резонанса для высокочувствительного биохимического анализа. *Молекулярная медицина*, (6), 2012.
- [36] Shigeo Minami Koji Matsubara, Satoshi Kawata. Optical chemical sensor based on surface plasmon measurement. *Applied Optics*, 27(6):1160–1163, 1988.
- [37] E. Stenberg B. Liedberg, I. Lundström. Principles of biosensing with an extended coupling matrix and surface plasmon resonance. *Sens. Actuators B: Chem.*, (11):63–72, 1993.
- [38] B. D. Gupta and R. K. Verma. Surface plasmon resonance-based fiber optic sensors: Principle, probe designs, and some applications. *Journal of Sensors*, (2009):12, 2009.
- [39] F. Yu, S. Tian, D. Yao, and W. Knoll. Surface plasmon enhanced diffraction for label-free biosensing. *Analytical Chemistry*, 76:3530, 2004.
- [40] C. J. Alleyne, A. G. Kirk, R. C. McPhedran, N. A. Nicorovici, and D. Maystre. Enhanced spr sensitivity using periodic metallic structures. *Optics Express*, 15(13):8163–8169, 2007.

- [41] S. S. Yee R. C. Jorgenson. A fiber-optic chemical sensor based on surface plasmon resonance. *Sens. Actuators B Chem.*, 12(3):213–220, 1993.
- [42] R. Slavik, J. Homola, J. Ctyroky, and E. Brynda. Novel spectral fiber optic sensor based on surface plasmon resonance. *Sensors and Actuators B Chem*, (74):106–111, 2001.
- [43] Hong-Yu Lin, Woo-Hu Tsai, Yu-Chia Tsao, and Bor-Chiou Sheu. Side-polished multimode fiber biosensor based on surface plasmon resonance with halogen light. *Appl. Opt.*, (46):800–806, 2007.
- [44] J. Ctyroky M. M. Piliarik, J. Homola. Surface plasmon resonance sensor based on a single-mode polarization-maintaining optical fiber. *Sensors and Actuators B Chem*, (90):236–242, 2003.
- [45] R. S. Chang M.H. Chiu, S. F. Wang. D-type fiber biosensor based on surface-plasmon resonance technology and heterodyne interferometry. *Optics Letters*, (30):233, 2003.
- [46] G. G. Nenninger, P. Tobika, J. Homola, and S. S. Yee. Long-range surface plasmons for high-resolution surface plasmon resonance sensors. *Sensors and Actuators*, (74):145–151, 2001.
- [47] J. T. Hastings, J. Guo, P. D. Keathley, P. B. Kumares, Y. Wei, S. Law, and L. G. Bachas. Optimal self-referenced sensing using long- and short- range surface plasmons. *Optics Express*, 15(26):17661–17672, 2007.
- [48] R. Slavik and J. Homola. Ultrahigh resolution long range surface plasmon-based sensor. *Sens. Actuators B, Chem.*, 123(1):10–12, Apr. 2007.
- [49] J. T. Hastings Jing Guo, P. Donald Keathley. Dual-mode surface-plasmon-resonance sensors using angular interrogation. *Opt. Lett.*, (33):512–514, 2008.
- [50] J.T. Hastings. Optimizing surface-plasmon resonance sensors for limit of detection based on a cramer-rao bound. *Sensors Journal*, 8(2), 2008.
- [51] Aurel Ymeti, Johannes S. Kanger, Jan Greve, Paul V. Lambeck, Robert Wijn, and Rene G. Heideman. Realization of a multichannel integrated young interferometer chemical sensor. *Appl. Opt.*, 42:5649–5660, 2003.
- [52] Farfield scientific limited.
- [53] Nile F. Hartman Bernard H. Schneider, John G. Edwards. Hartman interferometer: versatile integrated optic sensor for label-free, real-time quantification of nucleic acids, proteins, and pathogens. *Clinical Chemistry*, 43(9):1757–1763, 1997.

- [54] Henrik S. Sorensen, Niels B. Larsen, Peter R. Hansen, Peter E. Andersen, and Darryl J. Bornhop. Biosensing with backscattering interferometry. *SPIE*, 2009.
- [55] Manoj M. Varma, Halina D. Inerowicz, Fred E Regnier, and David D. Nolte. High-speed label-free detection by spinning-disk micro-interferometry. *Biosens. and Bioelectron.*, 19(11):1371–1376, 2004.
- [56] M. Zhao, D. D. Nolte, W. R. Cho, F. Regnier, M. Varma, G. Lawrence, and J. Pasqua. High-speed interferometric detection of label-free immunoassays on the biological compact disc. *J. Clin. Chem.*, 52(11):2135–2140, 2006.
- [57] Quadraspec inc.
- [58] D.J. Bornhop D. Markov, K. Swinney. Label-free molecular interaction determinations with nanoscale interferometry. *J. American Chemical Society*, (126):16659–16664, 2004.
- [59] R. Gush, J. M. Cronin, W. J. Stewart, C. H. Maule, J. Molloy, and N. J. Goddard. The resonant mirror: a novel optical biosensor for direct sensing of biomolecular interactions part i: Principle of operation and associated instrumentation. *Biosensors and Bioelectronics*, (8):347–353, 1993.
- [60] M. Zourob, S. Mohr, B. J. T. Brown, P. R. Fielden, M. McDonnell, and N. J. Goddard. The development of a metal clad leaky waveguide sensor for the detection of particles. *Sens. Actuators B Chem.*, 90(1-3):296–307, 2003.
- [61] P. R. Fielden N. J. Goddard M. Zourob, S. Mohr. Small-volume refractive index and fluorescence sensor for micro total analytical system (μ -tas) applications. *Sens. Actuators B*, (94):304–312, 2003.
- [62] Goddard NJ Zourob M. Metal clad leaky waveguides for chemical and biosensing applications. *Biosens Bioelectron*, 20(9):1718–27, Mar 15 2005.
- [63] M. Zourob, S. Mohr, B. J. T. Brown, P. R. Fielden, M. B. McDonnell, and N. J. Goddard. An integrated metal clad leaky waveguide sensor for detection of bacteria. *Analytical Chemistry*, 77(1):232–242, 2005.
- [64] N. Skivesen, R. Horvath, S. Thinggaard, N.B. Larsen, and H.C. Pedersen. Deep-probe metal-clad waveguide biosensors. *Biosens. Bioelectron.*, (22):1282, 2007.
- [65] E. Udd. An overview of fibre-optic sensors. *Rev Sci Instrum*, 66(8):4015, 1995.
- [66] C.B. Ojeda M.E. Bosch, A.J.R. Sanchez. Recent development in optical fiber biosensors. *Sensors*, 7:797, 2007.

- [67] A. D. Kersey, M. A. Davis, H. J. Patrick, M. LeBlanc, Koo, C. G. Askins, M. A. Putnam, and E. J. Friebele. Fiber grating sensors. *J. Lightwave Technol.*, (15):1442–1463, 1997.
- [68] K. O. Hill, Y. Fujii, D. C. Johnson, and B. S. Kawasaki. Photosensitivity in optical fiber waveguides: Application to reflection filter fabrication. *Appl. Phys. Lett.*, (32):647, 1978.
- [69] H.J. Sorin, W.V.; Shaw. A single-mode fiber evanescent grating reflector. *Lightwave Technology, Journal of*, 3(5):1041,1043, October 1985.
- [70] K. Schroeder, W. Ecke, R. Mueller, R. Willsch, and A. Andreev. A fibre bragg grating refractometer. *Meas. Sci. Technol.*, (12):757, 2001.
- [71] K. H. Smith, B. L. Ipson, T. L. Lowder, A. R. Hawkins, R. H. Selfridge, and S. M. Schultz. Surface-relief fiber bragg gratings for sensing applications. *Appl. Opt.*, (45):1669–1675, 2006.
- [72] T. L. Lowder, J. D. Gordon, S. M. Schultz, and R. H. Selfridge. Volatile organic compound sensing using a surface-relief d-shaped fiber bragg grating and a polydimethylsiloxane layer. *Opt. Lett.*, 32(17):2523–2525, 2007.
- [73] Byeong Ha Lee, Yu Liu, Sang Bae Lee, Sang Sam Choi, and Joo Nyung Jang. Displacements of the resonant peaks of a long-period fiber grating induced by a change of ambient refractive index. *Optics Letters*, 22(23):1769–1771, 1997.
- [74] A. Hale M. Sumetsky, Y. Dulashko. Fabrication and study of bent and coiled free silica nanowires: Self-coupling microloop optical interferometer. *Opt. Express*, (12):3521–3531, 2004.
- [75] Fei Xu, Valerio Pruneri, Vittoria Finazzi, and Gilberto Brambilla. An embedded optical nanowire loop resonator refractometric sensor. *Opt. Express*, (16):1062–1067, 2008.
- [76] Z. Ye J. Lou, L. Tong. Modeling of silica nanowires for optical sensing. *Opt. Express*, 13(6):2135–2140, 2005.
- [77] J. Pedersen, Xiao S., and Mortensen N. Slow-light enhanced absorption for bio-chemical sensing applications: potential of low-contrast lossy materials. *Journal Of The European Optical Society*, (Rapid Publications, 3), 2008.
- [78] Lars Rindorf and Ole Bang. Highly sensitive refractometer with a photonic-crystal-fiber long-period grating. *Opt. Lett.*, (33):563–565, 2008.
- [79] Lars Rindorf, Jesper B. Jensen, Martin Dufva, Lars Hagsholm Pedersen, Poul Erik Høiby, and Ole Bang. Photonic crystal fiber long-period gratings for biochemical sensing. *Opt. Express*, (14):8224–8231, 2006.

- [80] J. Sabarinathan¹ J. Topol'ančik¹, P. Bhattacharya¹ and P.-C. Yu. Fluid detection with photonic crystal-based multichannel waveguides. *Appl. Phys. Lett.*, (82):1143, 2003.
- [81] Loncar M., Scherer A., and Qiu Y. Photonic crystal laser sources for chemical detection. *Applied Physics Letters*, 82(26):4648–4650, 2003.
- [82] E. Chow, A. Grot, L. W. Mirkarimi, M. Sigalas, and G. Girolami. Ultracompact biochemical sensor built with two-dimensional photonic crystal microcavity. *Opt. Lett.*, (29):1093–1095, 2004.
- [83] Mindy R. Lee and Philippe M. Fauchet. Two-dimensional silicon photonic crystal based biosensing platform for protein detection. *Opt. Express*, (15):4530–4535, 2007.
- [84] Mindy R. Lee and Philippe M. Fauchet. Nanoscale microcavity sensor for single particle detection. *Opt. Lett.*, (32):3284–3286, 2007.
- [85] M. Askari, S. Yegnanarayanan, and A. Adibi. Photonic crystal waveguide based sensors. *Proc. SPIE*, page 7946, 2011.
- [86] P. Li, B. Lin, J. Gerstenmaier, and B.T. Cunningham. A new method for label-free imaging of biomolecular interactions. *Sensors and Actuators B*, 99:6–13, 2004.
- [87] Lin B, Qiu J, Gerstenmeier J, Li P, Pien H, Pepper J, and Cunningham B. A label-free optical technique for detecting small molecule interactions. *Biosens Bioelectron*, 17:827–34, Sep 2002.
- [88] B.T. Cunningham N. Ganesh, I.D. Block. Near ultraviolet-wavelength photonic-crystal biosensor with enhanced surface-to-bulk sensitivity ratio. *Appl. Phys. Lett.*, 89(023901), 2006.
- [89] Sudeep Mandal and David Erickson. Nanoscale optofluidic sensor arrays. *Opt. Express*, (16):1623–1631, 2008.
- [90] E.V. Alieva V.N. Konopsky. Photonic crystal surface waves for optical biosensors. *Anal. Chem.*, (79):4729, 2007.
- [91] H. Hanchen F. Goos. Ein neuer und fundamentaler versuh zur totalerlexion. *Ann. Physic*, 6 Folge, Band 1, 1947.
- [92] M. Brenci, R. Calzolari, F. Cosi, G. Nunzi Conti, S. Pelli, and G. C. Righini. Microspherical resonators for biophotonic sensors. *Proc. SPIE*, page 6158, 2006.
- [93] F. Vollmer, S. Arnold, D. Braun, I. Teraoka, and A. Libchaber. Multiplexed dna quantification by spectroscopic shift of two microspherecavities. *Biophys. J.*, (85):1974–1979, 2003.

- [94] Robert W. Boyd and John E. Heebner. Sensitive disk resonator photonic biosensor. *Applied Optics*, 40(31):5742–5747, 2001.
- [95] L. He, Y. F. Xiao, C. Dong, J. Zhu, V. Gaddam, and L. Yang. Compensation of thermal refraction effect in high-q toroidal microresonator by polydimethylsiloxane coating. *Appl. Phys. Lett.*, 93(201102), 2008.
- [96] X. Fan, I. M. White, S. I. Shopova, H. Zhu, J. D. Suter, and Y. Sun. Sensitive optical biosensors for unlabeled targets: A review. *Anal.Chim.*, page 8–26, 2008.
- [97] F. Vollmer, D. Braun, A. Libchaber, M. Khoshshima, I. Teraoka, and S. Arnold. Protein detection by optical shift of a resonant microcavity. *Appl. Phys. Lett.*, 80(21):4057–4059, 2002.
- [98] F. Vollmer. Taking detection to the limit: Monitoring single molecule interactions on a label-free microcavity biosensor. *Proc. Spie*, Oct 2014.
- [99] K. Vahala A. Armani. Heavy water detection using ultra-high-q microcavities. *OPTICS LETTERS*, 31(12), June 15 2006.
- [100] F. Vollmer, S. Arnold, D. Braun, I. Teraoka, and A. L. Multiplexed. Dna quantification by spectroscopic shift of two microsphere cavities. *Biophysical Journal*, 85:1974–1979, September 2003.
- [101] A. Rosenberger D. Ganta, E. Dale. Measuring sub-nm adsorbed water layer thickness and desorption rate sing a fused-silica whispering-gallery microresonator. *Meas. Sci. Technol.*, 25(055206), 2014.
- [102] G. Hwang, L. Pang, E. Mullen, and Y. Fainman. Plasmonic sensing of biological analytes through nanoholes. *Ieee Sensors Journal*, 8:2047–2079, 2008.
- [103] Swann M. J., Peel L. L., Carrington S., and Freeman N. J. Dual-polarization interferometry: an analytical technique to measure changes in protein structure in real time, to determine the stoichiometry of binding events, and to differentiate between specific and nonspecific interactions. *Anal Biochem.*, 329(2):190–8, Jun 15 2004.
- [104] E. Krioukov, D. J. W. Klunder, A. Driessen, J. Greve, and C. Otto. Integrated optical microcavities for enhanced evanescent-wave spectroscopy. *Optics Letters*, 27(17):1504–1506, 2002.
- [105] C. Otto E. Krioukov, J. Greve. Performance of integrated optical microcavities for refractive index and fluorescence sensing. *Sens. Actuators B*, (90):58–67, 2003.

- [106] Evgueni Krioukova, Dion Klunderb, Alfred Driessenb, Jan Grevea, and Cees Otto. Two-photon fluorescence excitation using an integrated optical microcavity: a promising tool for biosensing of natural chromophores. *Talanta*, 65(5):1086–1090, 15 March 2005.
- [107] R.W. Boyd, J.E. Heebner, N.N. Lepeshkin, Q.H. Park, A. Schweinsberg, G.W. Wicks, A.S. Baca, J.E. Fajardo, R.R. Hancock, M.A. Lewis, R.M. Boysel, M. Quesada, R. Welty, A.R. Bleier, J. Treichler, R.E. Slusher, J. Mod. R.W. Boyd, J.E. Heebner, N.N. Lepeshkin, Q.H. Park, A. Schweinsberg, G.W. Wicks, A.S. Baca, J.E. Fajardo, R.R. Hancock, M.A. Lewis, R.M. Boysel, M. Quesada, R. Welty and A.R. Bleier, J. Treichler, R.E. Slusher, and J. Mod. Nanofabrication of optical structures and devices for photonics and biophotonics. *Opt.*, (50):2543, 2003.
- [108] A. Schweinsberg, S. Hocde, N.N. Lepeshkin, R.W. Boyd, C. Chase, and J.E. Fajardo. Slot-waveguide biochemical sensor. *Sens. Actuators B Chem.*, (123):727, 2007.
- [109] J.L. Nadeau, V.S. Ilchenko, D. Kossakovski, G.H. Bearman, and L. Maleki. High-q whispering-gallery mode sensor in liquids. *Laser Resonators and Beam*, 2005.
- [110] Soteropulos C. E. and Hunt H. K. Attaching biological probes to silica optical biosensors using silane coupling agents. *J. Vis. Exp.*, 63(e3866), 2012.
- [111] I. Teraoka S. Arnold, M. Khoshshima. Shift of whispering-gallery modes in microspheres by protein adsorption. *OPTICS LETTERS*, 28(4), February 15 2003.
- [112] Carol Soteropulos 2 Heather K. Hunt and Andrea M. Armani. Bioconjugation strategies for microtoroidal optical resonators. *Sensors*, (10):9317–9336, 2010.
- [113] Zheng Zhang, Timothy Chao, Shengfu Chen, and Shaoyi Jiang. Superlow fouling sulfobetaine and carboxybetaine polymers on glass slides. *Langmuir*, (22):10072–10077, 2006.
- [114] Hana Vaisocherova, Wei Yang, Zheng Zhang, Zhiqiang Cao, Gang Cheng, Marek Piliarik and Jir Homola, and Shaoyi Jiang. Ultralow fouling and functionalizable surface chemistry based on a zwitterionic polymer enabling sensitive and specific protein detection in undiluted blood plasma. *Anal. Chem.*, (80):7894–7901, 2008.
- [115] James T. Kirka, Norman D. Braultb, Tom Baehr-Jonesc, Michael Hochbergc, Shaoyi Jiangb, and Daniel M. Ratnera. Zwitterionic polymer-modified silicon microring resonators for label-free biosensing in undiluted human plasma. *Biosens Bioelectron*, (42), April 15 2013.
- [116] Xue-Long Sun, Cheryl L. Stabler, Chrystelle S. Cazalis, and Elliot L. Chaikof. Carbohydrate and protein immobilization onto solid surfaces by sequential diels-alder and azide-alkyne cycloadditions bioconjugate. *Chem.*, (17):52–57, 2006.

- [117] Jeet Kalia and Ronald T. Raines. Advances in bioconjugation. *Current Organic Chemistry*, (14):138–147, 2010.
- [118] Sarah L. Westcott, Jiangquan Zhang, Robert K. Shelton, Nellie M. K. Bruce, Sachin Gupta, Steven L. Keen, Jeremy W. Tillman, Lara B. Wald, Brian N. Strecker, A. T. Rosenberger, Roy R. Davidson, Wei Chen, Kevin G. Donovan, and John V. Hryniewicz. Broadband optical absorbance spectroscopy using a whispering gallery mode microsphere resonator. *REVIEW OF SCIENTIFIC INSTRUMENTS*, 79(033106), 2008.
- [119] Ali Hajimiri Arjang Hassibi, Haris Vikalo. On noise processes and limits of performance in biosensors. *Journal of Applied Physics*, 102(014909), 2007.
- [120] Wei-Liang Jin Matthew R. Foreman and Frank Vollmer. Optimizing detection limits in whispering gallery mode biosensing. *Opt Express.*, 22(5):5491–511, Mar 10 2014.
- [121] Ming Han and Anbo Wang. Temperature compensation of optical microresonators using a surface layer with negative thermo-optic coefficient. *OPTICS LETTERS*, 32(13), July 1 2007.
- [122] Anatoliy Savchenkov Thanh Le, Nan Yu, Lute Maleki, and W. H. Steier. Optical resonant sensors: a method to reduce the effect of thermal drift. *APPLIED OPTICS*, 48(3), 20 January 2009.
- [123] Niranjan M. Hanumegowda, Caleb J. Stica, Bijal C. Patel, Ian White, and Xudong Fan. Refractometric sensors based on microsphere resonators. *Applied Physics Letters*, 87(201107), 2005.
- [124] Reno Lessarda, Olivier Rousseau-Cyra, Maxime Charleboisa, Christophe Riviereb Ozzy Mermutb, and Claudine N. Allena. Flow cytometer system for single-shot biosensing based on whispering gallery modes of fluorescent microspheres. *Proc. of SPIE*, 8600(86001Q-1), 2013.
- [125] Fan X., White I., Shopova S., and et al. Sensitive optical biosensors for unlabeled targets: a review. *Anal. Chimica*, 620:8, 2008.
- [126] Ilchenko V. Gorodetsky M., Savchenkov A. Ultimate q of optical microsphere resonators. *Opt. Lett.*, 21:453, 1996.
- [127] Rosenberger A. Ganta D., Dale E. Measuring sub-nm adsorbed water layer thickness and desorption rate using a fused-silica whispering-gallery microresonator. *Meas. Sc. and Tech.*, 25(055206), 2014.
- [128] Bailey R. Luchansky M. High-q optical sensors for chemical and biological analysis. *Anal. Chem.*, 84:793, 2012.

- [129] Yang L. Volmer F. Label-free detection with high-q microcavities: a review of biosensing mechanisms for integrated devices. *Nanophotonics*, 1:267, 2012.
- [130] Yury A. Demchenko and Michael L. Gorodetsky. Analytical estimates of eigenfrequencies, dispersion, and field distribution in whispering gallery resonators. *Journal of the Optical Society of America B*, 30(11):3056–3063, 2013.
- [131] Rosenberger A. Farca G., Shopova S. Cavity-enhanced laser absorption spectroscopy using microresonator whispering-gallery modes. *Opt. Express*, 15(25):17443–17448, 2007.
- [132] Westcott S., Zhang J., Shelton R., and et al. Broadband optical absorbance spectroscopy using a whispering gallery mode microsphere resonator. *Rev. Sci. Instrum.*, 79:033106, 2008.
- [133] Arnold S. Teraoka I. Theory of resonance shifts in te and tm whispering gallery modes by nonradial perturbations for sensing applications. *J. Opt. Soc. Am. B.*, 23(1381), 2006.
- [134] Arnold S., Khoshima M., and Teraoka I. Shift of whispering-gallery modes in microspheres by protein adsorption. *Opt. Lett.*, 28(4):272, 2003.
- [135] Vernoooy D., Ilchenko V., Mabuchi H., and et al. High-q measurements of fused-silica microspheres in the near infrared. *Opt. Lett.*, 23:247, 1998.
- [136] Лифшиц Е.М. Ландау Л.Д. *Теория поля.*, volume Т.,2. Ч.,4. М. Наука, 1988.
- [137] Johnson S., Ibanescu M., Skorobogatiy M., and et al. Perturbation theory for maxwell’s equations with shifting material boundaries. *Phys. Rev.*, 65(066611), 2002.
- [138] C. P. Dettmann, G. V. Morozov, M. Sieber, and H. Waalkens. Directional emission from an optical microdisk resonator with a point scatterer. *EPL*, 82:34002, 2008.
- [139] Q. Yang, X. Jiang, Y. Cui, L. Shao, and Y. Xiao. Dynamical tunneling-assisted coupling of high-q deformed microcavities using a free-space beam. *Physical Review A*, 88(023810), 2013.
- [140] Shuai Liu, Zhiyuan Gu, Nan Zhang, Kaiyang Wang, Shumin Xiao, Quan Lyu, and Qinghai Song. Endfire injection of guided light into optical microcavity. *Appl. Phys. B*, 120:255–260, 2015.
- [141] Rand Ismaeel, Timothy Lee, Ming Ding, Mohammed Belal, and Gilberto Brambilla. Optical microfiber passive components. *Laser Photonics*, 7(3):350–384, 2013.
- [142] A. Serpenguzel, S. Arnold, G. Griffel, and J. A. Lock. Enhanced coupling to microsphere resonances with optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 14(4):790, 1997.

- [143] J. C. Knight, G. Cheung, F. Jacques, and T. A. Birks. Phase-matched excitation of whispering-gallery-mode resonances by a fiber taper. *OPTICS LETTERS*, 22(15):1129, 1997.
- [144] O. J. Painter S. M. Spillane, T. J. Kippenberg and K. J. Vahala. Ideality in a fiber-taper-coupled microresonator system for application to cavity quantum electrodynamics. *Thomas J. Watson Laboratory of Applied Physics, California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA*, 2003.
- [145] J.D. Love D.R. Rowland. Evanescent wave coupling of whispering gallery modes of a dielectric cylinder. *IEE PROCEEDINGS*, 140(3):177, 1993.
- [146] Michael J. Humphrey, Elijah Dale, A.T. Rosenberger, and D.K. Bandy. Calculation of optimal fiber radius and whispering-gallery mode spectra for a fiber-coupled microsphere. *Optics Communications*, 271:124, 2007.
- [147] N. Dubreuil, J. C. Knight, D. K. Leventhal, V. Sandoghdar, J. Hare, and V. Lefèvre. Eroded monomode optical fiber for whispering-gallery mode excitation in fused-silica microspheres. *Opt. Lett.*, 20:813, 1995.
- [148] S. Yao L. Maleki, V. Ilchenko. Simple fiber-optic coupling for microsphere resonators. *NASA's Jet Propulsion Laboratory Tech Briefs*, 2001.
- [149] Ruohui Wang, Michael Fraser, Jiacheng Li, Xueguang Qiao, and Anbo Wang. Integrated in-fiber coupler for microsphere whispering-gallery modes resonator excitation. *OPTICS LETTERS*, 40(3):308, 2015.
- [150] Sile Nic Chormaic Jonathan M. Ward, Patrice Feron. A taper-fused microspherical laser source. *IEEE PHOTONICS TECHNOLOGY LETTERS*, 20(6):392, 2008.
- [151] Faraz Monifi, Sahin Kaya Ozdemir, Jacob Friedlein, and Lan Yang. Encapsulation of a fiber taper coupled microtoroid resonator in a polymer matrix. *IEEE PHOTONICS TECHNOLOGY LETTERS*, 25(15):1458, 2013.
- [152] Xueying Jin Yongchao Dong, Keyi Wang. Packaged microsphere-taper coupling system with a high q factor. *APPLIED OPTICS*, 54(2):277, 2015.
- [153] Yanyan Zhou, Di Zhu, Xia Yu, Wei Ding, and Feng Luan. Fano resonances in metallic grating coupled whispering gallery mode resonator. *APPLIED PHYSICS LETTERS*, 103:151108, 2013.
- [154] Yanyan Zhou, Di Zhu, Xia Yu, Wei Ding, and Feng Luan. D. farnesia, g. c. righinia, a. baruccib, s. berneschib, f. chiavaiolib, f. cosib, s. pellig, s. soriab, c. tronob, d. risticc, m. ferrarid, g. nunzi contib. *Proc. of SPIE*, 9133:913314, 2014.

- [155] D. Farnesi, F. Chiavaioli, F. Baldini, G. C. Righini, S. Soria, C. Trono, and G. Nunzi Conti. Quasi-distributed and wavelength selective addressing of optical micro-resonators based on long period fiber gratings. *OPTICS EXPRESS*, 23(16):21175, 2015.
- [156] J.P. Laine, B. E. Little, D. R. Lim, H. C. Tapalian, L. C. Kimerling, and H. A. Haus. Microsphere resonator mode characterization by pedestal anti-resonant reflecting waveguide coupler. *IEEE PHOTONICS TECHNOLOGY LETTERS*, 20(8):1004, 2000.
- [157] Y. Pan and R. K. Chang. Highly efficient prism coupling to whispering gallery modes of a square m cavity. *Appl. Phys. Lett.*, 82(4):487–489, 2003.
- [158] A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, W. Liang, V. S. Ilchenko, D. Seidel, and L. Maleki. Kerr combs with selectable central frequency. *Nature Photonics*, 5, 2011.
- [159] Josef U. Furst, Karsten Buse, Ingo Breunig, Petra Becker, Josef Liebertz, and Ladislav Bohatý. Second-harmonic generation of light at 245 nm in a lithium tetraborate whispering gallery resonator. *Optics Letters*, 40(9), 2015.
- [160] Wei Liang, Anatoliy A. Savchenkov, Zhenda Xie, James F. McMillan, Jan Burkhart, Vladimir S. Ilchenko, Chee Wei Wong, Andrey B. Matsko, and Lute Maleki. Miniature multioctave light source based on a monolithic microcavity. *Optica*, 2(1), 2015.
- [161] Gerhard Schunk, Josef U. Furst, Michael Fortsch, Dmitry V. Strekalov, Ulrich Vogl, Florian Sedlmeir, Harald G. L. Schwefel, Gerd Leuchs, and Christoph Marquardt. Identifying modes of large whispering-gallery mode resonators from the spectrum and emission pattern. *Optics Express*, 22(25):30795, 2014.
- [162] V. S. Ilchenko, A. M. Bennett, P. Santini, A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, and L. Maleki. Whispering gallery mode diamond resonator. *Optics Letters*, 38(21), 2013.
- [163] Lute Maleki Makan Mohageg, Andrey B. Matsko. Lasing and up conversion from a nominally pure whispering gallery mode resonator. *Optics Express*, 20(15):16704, 2012.
- [164] M. L. Gorodetsky A. E. Fomin. Spheroidal microresonators for the optoelectronics. *Proc. of SPIE*, 5948(594818-8), 2005.
- [165] I. Breunig, B. Sturman, F. Sedlmeir, H. G. L. Schwefel, and K. Buse. Whispering gallery modes at the rim of an axisymmetric optical resonator: Analytical versus numerical description and comparison with experiment. *Optics Express*, Vol. 21, Issue 25, pages 30683–30692, 2013.
- [166] Matthew R. Foreman, Florian Sedlmeir, Harald G. L. Schwefel, and Gerd Leuchs. Dielectric tuning and coupling of whispering gallery modes using an anisotropic prism. *J. Opt. Soc. Am. B*, 33(11):2177–2195, 2016.

- [167] V. S. Ilchenko M. L. Gorodetsky, A. A. Savchenkov. Optical microsphere resonators: optimal coupling and the ultimate q . *Proc. SPIE*, 3267, 1998.
- [168] G. A. Santamaría-Botello, L. E. García Muñoz, F. Sedlmeir, S. Preu, D. Segovia-Vargas, K. Atia Abdalmalak, S. Llorente Romano, A. García Lampérez, S. Malzer, G. H. Döhler, H. G. L. Schwefel, and H. B. Weber. Maximization of the optical intra-cavity power of whispering-gallery mode resonators via coupling prism. *Optics Express*, 24(23):26503–26514, 2016.
- [169] Ю А. Демченко and М Л. Городецкий. Влияние адсорбированного слоя на резонансные частоты и добротность сферических микрорезонаторов. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.*, (3):32, 2015.
- [170] Ф. Риле. *Стандарты частоты. Принципы и приложения*. ФИЗМАТЛИТ, 2009.
- [171] J. Mark, B. Tromborg, J. Mark, and V. Velichansky. Instabilities in a laser diode with strong optical feedback. *Proc. SPIE*, 1837:90–104, 1992.
- [172] Bjarne Tromborg, Henning Olesen, Xing Pan, and Shigeru Saito. Transcription line description of optical feedback and injection locking for fabry-perot and dfb lasers. *IEEE J. Quantum Electron.*, 23:1875–1889, 1987.
- [173] T. Kessler, C. Hagemann, C. Grebing, T. Legero, U. Sterr, F. Riehle, M.J. Martin, L. Chen, and J. Ye. A sub-40-mhz-linewidth laser based on a silicon single-crystal optical cavity. *Nature Photonics*, 6:687–692, 2012.
- [174] A. Rauschenbeutel D. O’Sheam A. Rettenmaier. Active frequency stabilization of an ultra-high q whispering-gallery-mode microresonator. *Appl Phys B*, 99:623, 2010.
- [175] E. Kirilov, M. J. Mark, M. Segl, and H.C. Nagerl. Compact, robust, and spectrally pure diode-laser system with a filtered output and a tunable copy for absolute referencing. *Appl Phys B*, 119:233–240, 2015.
- [176] Jinkang Lim, Anatoliy A. Savchenkov, Andrey B. Matsko, Shu-Wei Huang, Lute Maleki, and Chee Wei Wong. Microresonator-stabilized extended-cavity diode laser for supercavity frequency stabilization. *Optics Letters*, 42:1249–1252, 2017.
- [177] Schliesser A, Riviere R, Anetsberger G, Arcizet O, and Kippenberg T. Resolved sideband cooling of a micromechanical oscillator. *Nat. Phys*, 4:415, 2008.
- [178] G. ANETSBERGER, R. RIVIE’RE, A. SCHLIESSER, O. ARCIZET, and T. J. KIPPENBERG. Ultralow-dissipation optomechanical resonators on a chip. *Nature Photonics*, 2:627, 2008.

- [179] Jiang Li, Hansuek Lee, Tong Chen, and Kerry J. Vahala. Characterization of a high coherence, brillouin microcavity laser on silicon. *Optics Express*, 20(18):20170, 2012.
- [180] S. A. Bhave S. Tallur. Electromechanically induced ghz rate optical frequency modulation in silicon. *Optics Express*, 4:20–170, 2012.
- [181] V. S. Ilchenko, E. Dale, W. Liang, J. Byrd, D. Eliyahu, A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, D. Seidel, and L. Maleki. Compact tunable khz-linewidth semiconductor laser stabilized with a whispering-gallery mode microresonator. *Proc. of SPIE*, 7913, 2011.
- [182] А. Н. Ораевский, А. В. Яровицкий, and В. Л. Величанский. Стабилизация частоты излучений полупроводникового лазера модой шепчущей галереи. *Квантовая электроника*, 31(10):897, 2001.
- [183] V.E. Lobanov, G. Lihachev, T. J. Kippenberg, and M.L. Gorodetsky. Frequency combs and platicons in optical microresonators with normal gvd. *Opt. Express*, 23(6):7713–7721, Mar 2015.
- [184] Vladimir S. Ilchenko Michael L. Gorodetsky, Andrew D. Pryamikov. Rayleigh scattering in high-q microspheres. *J. Opt. Soc. Am. B*, 17(6):1051, 2000.
- [185] V. Sandoghdar A. Mazzei, O. Benson L. de S. Menezes S. Götzinger. Normal mode splitting and purcell enhancement of local rayleigh scattering in a microsphere resonator. *Quantum Electronics and Laser Science Conference*, 07:1–2, 2007.
- [186] Chang-Ling Zou, Yong Yang, Chun-Hua Dong, Yun-Feng Xiao, Xiao-Wei Wu, Zheng-Fu Han, and Guang-Can Guo. Taper-microsphere coupling with numerical calculation of coupled-mode theory. *IEEE PHOTONICS TECHNOLOGY LETTERS*, 25(11):1895, 2008.

Список публикаций по теме диссертации

- [A1] M. L. Gorodetsky and Yu A. Demchenko. Accurate analytical estimates of eigenfrequencies and dispersion in whispering-gallery spheroidal resonators. In *Laser Resonators, Microresonators, and Beam Control XIV*, volume 8236 of *Proceedings of SPIE*, page 823623, 2012.
- [A2] Yury A. Demchenko and Michael L. Gorodetsky. Analytical estimates of eigenfrequencies, dispersion, and field distribution in whispering gallery resonators. *Journal of the Optical Society of America B*, 30(11):3056–3063, 2013.
- [A3] Ю. А. Демченко and М. Л. Городецкий. Влияние адсорбированного слоя на резонансные частоты и добротность сферических микрорезонаторов. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.*, (3):32, 2015.
- [A4] М. Л. Городецкий, Ю. А. Демченко, Д. Ф. Зайцев, В. Н. Крутиков, Ю. М. Золотаревский, and В. Л. Лясковский. Высокодобротные оптические микрорезонаторы с модами типа шепчущей галереи и их применение в прецизионных измерениях. *Метрология*, (12):22–40, 2014.
- [A5] Ю. А. Демченко, И. А. Биленко, and М. Л. Городецкий. Оптимизация призмной связи с оптическими микрорезонаторами типа шепчущей галереи. *Квантовая электроника*, 47(8), 2017.
- [A6] Ю. А. Демченко. Стабилизация лазера резонатором с МШГ. *Труды школы-семинара «Волны-2017»*, (Когерентные и нелинейные волновые явления):20–23, 2017.