Номер проекта 13-01-00022. **Отчет 2014 (промежуточный)**

Название проекта Геометрические методы в теории приближений и теории функций и их приложения

Коды классификатора, соответствующие содержанию фактически проделанной работы:
01-109 (*основной*) Вещественный и функциональный анализ
01-111 Дифференциальные уравнения с частными производными

Аннотация

На текущем этапе исследовались актуальные задачи геометрической теории приближений и теории функций, были получены приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных, теории жадных алгоритмов, теоремам вложения функциональных пространств, вычислению поперечников различных классов в весовом случае и задаче наилучшего приближения весового класса Соболева N-звенными ломаными с фиксированными и нефиксированными узлами.

В частности, выполнено следующее:

- Получены порядковые оценки нормы двухвесового оператора суммирования на слабо регулярном дереве с весами, являющимися функцией расстояния от корня дерева.

- Получены новые теоремы вложения весовых классов Соболева в весовое пространство Лебега на области, удовлетворяющей условию Джона, с весами, являющимися функцией расстояния до h-множества, содержащегося в границе области.

- Для весов, определяемых функциями специального вида, зависящих от расстояния до h-множества, получены порядковые оценки поперечников весовых классов Соболева.

- Получена оценка сверху приближения функций весового класса Соболева $W^1_{\infty,\varphi}$ ломаными с фиксированным и нефиксированным набором узлов.

- Найдены точные оценки минимального собственного значения на различных классах потенциалов в задаче Штурма–Лиувилля на полуоси с граничным условием в нуле.

- Установлено, что с большой вероятностью случайный K-разреженный сигнал может быть точно восстановлен за $\lceil K(1+\varepsilon)\rceil$ итераций ортогонального жадного алгоритма, что показывает почти оптимальность в вероятностном смысле ортогонального жадного алгоритма в задаче точного восстановления разреженных сигналов;

- Исследованы неравенства типа Лебега для слабого чебышевского жадного алгоритма, являющегося обобщением слабого ортогонального алгоритма на случай банаховых пространств.

- Установлено, что ограниченно слабо компактное m-связное множество в сепарабельном банаховом пространстве монотонно линейно связно.

- Получено обобщение известной теоремы Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости последовательностей на случай сходимости последовательностей относительно ассоциированной (по Брауну) нормы.

- Охарактеризованы классы множеств в линейных нормированных пространствах и пространствах с несимметричной полунормой, обладающих непрерывной аддитивной ε-выборкой для каждого $\varepsilon > 0$. Получены приложения для широкого класса классических нелинейных аппроксимирующих агрегатов в пространстве непрерывных функций на связном метрическом компакте.

- Решена задача равномерного приближения равномерно непрерывных функций, заданных на пространстве L^p, $1 < p < 2$, функциями, имеющими гёльдерову производную с показателем $p - 1$, с получением эффективных оценок.

Объявленные ранее цели проекта на 2014 год

В задаче об изучении структурных свойств чебышёвских множеств и солнц продолжить исследование монотонной связности чебышёвских множеств и солнц в пространствах типа C(Q) и в общих линейных нормированных пространствах, изучить монотонную линейную связность ограниченно слабо компактных подмножеств линейных нормированных пространств.

Продолжить изучение задачи о поперечниках весовых функциональных классов на многомерных областях.

Найти двухсторонние оценки минимального собственного числа на разных классах функций оператора Штурма-Лиувилля с различными граничными условиями.

Получить вероятностные оценки на эффективности жадных алгоритмов в задаче о сжатых измерениях

Продолжить изучение относительных поперечников для весового класса Соболева с ограничениями на первую производную.

Продолжить изучение вопросов сглаживания равномерно непрерывных функций.

Степень выполнения поставленных в проекте задач

Запланированные на данный этап задачи полностью выполнены, в ряде задач получены существенные продвижения.

Полученные за отчетный год (2014) важнейшие результаты

Получены порядковые оценки нормы двухвесового оператора суммирования на слабо регулярном дереве с весами, являющимися функцией расстояния от корня дерева. Эти результаты были использованы для доказательства новых теорем вложения весовых классов Соболева в весовое пространство Лебега на области, удовлетворяющей условию Джона, с весами, являющимися функцией расстояния до h-множества, содержащегося в границе области. Для таких весов, заданных функциями специального вида, получены порядковые оценки поперечников весовых классов Соболева.

В задаче равномерного приближения весового класса $W^1_{\infty,\varphi}$ N-звенными ломаными (с фиксированным и нефиксированным набором узлов) класса $k \cdot W^1_\infty$, где $k \geqslant \|\varphi\|_\infty$, получены оценки сверху наилучшего приближения. В случае нефиксированных узлов оценка зависит от числа звеньев и L_1-нормы веса, а в случае фиксированных узлов – от максимума L_1-норм веса на отрезках разбиения.

Найдены точные оценки минимального собственного значения на различных классах потенциалов в задаче Штурма–Лиувилля на полуоси с граничным условием в нуле.

Установлено, что с вероятностью $1 - \exp(-C(\varepsilon)K)$ случайный K-разреженный сигнал может быть точно восстановлен за $\lceil K(1+\varepsilon)\rceil$ итераций ортогонального жадного алгоритма. (Данный результат получен совместно с В. Н. Темляковым.) Таким образом, в задаче точного восстановления разреженных сигналов ортогональный жадный алгоритм оказался почти оптимальным в вероятностном смысле. Исследованы неравенства типа Лебега для слабого чебышевского жадного алгоритма, являющегося обобщением слабого ортогонального алгоритма на случай банаховых пространств.

Установлено, что ограниченно слабо компактное m-связное (связное по Менгеру) множество в сепарабельном банаховом пространстве монотонно линейно связно (т.е. любые две точки такого множества, можно связать непрерывной монотонной кривой, лежащей во множестве). Получено обобщение известной теоремы Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости последовательностей на случай сходимости последовательностей относительно ассоциированной (по Брауну) нормы.

В терминах ограниченной стягиваемости охарактеризованы классы множеств в линейных нормированных пространствах и в пространствах с несимметричной полунормой, обладающих непрерывной аддитивной ε-выборкой для каждого $\varepsilon > 0$. Получены приложения для широкого класса классических нелинейных аппроксимирующих объектов в пространстве непрерывных функций.

Методы и подходы, использованные в ходе выполнения проекта

При оценке норм двухвесового оператора суммирования на дереве при $p < q$ получен дискретный аналог теоремы Эванса–Харриса–Пика. Сначала задача решена в некотором частном случае весов с использованием методов вариационного исчисления, общий случай сведен к данному. В случае $p \geqslant q$ задача сведена к оценке нормы оператора суммирования последовательностей – для сведения производится разделение дерева с конечным множеством вершин на со специальными весами в вершинах.

Для доказательства теорем вложения используется разработанная ранее А.А. Васильевой техника, использующая древоподобную структуру области с условием Джона, при этом оценивается норма специального двухвесового оператора на дереве. Оценка сверху этой нормы нормы использует результат M. Christ'а о семействе разбиений h-множества, элементы которого являются вершинами некоторого слабо регулярного дерева $\hat{\mathcal{A}}$. Норма исходного оператора суммирования оценивается сверху через норму оператора суммирования на $\hat{\mathcal{A}}$.

Для оценки поперечников используются полученные оценки константы вложения весового класса Соболева на подобласти, порожденной поддеревом. Затем применяется ранее полученный А.А. Васильевой результат об оценке сверху поперечника функционального класса на множестве с древоподобной структурой. Для оценки снизу строятся функции со специальным свойством и затем применяется метод дискретизации Майорова.

Результаты такого типа в невесовом случае восходят к работам В.М. Тихомирова, М.Ш. Бирмана, М.З. Соломяка, Х. Трибеля, О.В. Бесова, С.Б. Бабаджанова, Р.С. Исмагилова, Ю.И. Маковоза, Б.С. Кашина, В.Н. Темлякова, Э.М. Галеева, Е.Д. Куланина, а в весовом – к работам Б.С. Кашина, О.В. Бесова, Е.Д. Куланина, R. DeVore, R.C. Sharpley, К. Т. Мынбаева, М. Отелбаева и А.А. Васильевой.

При получении оценок на минимальное собственное число для сингулярных дифференциальных операторов впервые применены новые методы, сводящие эту задачу к исследованию положительности специальной функции. Для вычисления точных оценок на минимальное собственное число на классе потенциалов с ограниченной L_1-нормой были использованы методы вариационного и функционального анализа.

В задаче о монотонной связности m-связных (связных по Менгеру) множеств применялись методы геометрической теории приближений и методы геометрии банаховых пространств. Введенное автором понятие монотонной линейной связности множества оказалось вполне естественным при изучении как геометрических, так и топологических свойств чебышёвских множеств и солнц в линейных нормированных пространствах. Понятие монотонной линейной связности обобщает конечномерное понятие l^1-выпуклости, введенное Х. Беренсом и Л. Хетцельтом в 80-х годах и имеет тесную связь с классическим понятием d-выпуклости (выпуклости о Менгеру), исследовавшимся В.Г. Болтянским и П.С. Солтаном, и недавно - Х. Мартини и другими. Также были использованы методы теории R-слабо выпуклых множеств (множеств, слабо выпуклых по Виалю), активно разрабатываемые в настоящее время Е.С. Половинкиным, М.В. Балашовым и Г.Е. Ивановым. При исследовании вопросов о соотношении сходимости последовательностей относительно ассоциированной (по Брауну) нормы и слабой сходимости относительно некоторой границы Джеймса пространства использовался следующий результат об I-генерирующих множествах, введенных Линденштраусом и Фонфом: $B^* = \overline{\mathrm{conv} C} \implies C$ (I)-генерирует $B^* \implies B^* = \overline{\mathrm{conv}}^{\,w^*} C$. Далее, использовался недавний результат, полученный независимо О. Нигардом и О. Календой, согласно которому, если $C \subset B^*$ (I)-генерирует шар B^*, то C – множество Рейнуотера, т.е. множество со следующим свойством: если ограниченная последовательность $(x_n) \subset X$ сходится поточечно на C, то (x_n) сходится слабо.

В задаче об оценке сверху приближения функций весового класса Соболева ломаными с фиксированным и нефиксированным набором узлов использовались методы теории функций, геометрической теории приближения функций и теории вариационного исчисления, а также результаты Т.В. Семеновой, полученные для случая отрезка.

В задаче о структурных свойствах множеств, обладающих ε-выборкой для каждого $\varepsilon > 0$, использовались методы геометрической теории приближений и геометрической топологии и методы геометрии банаховых пространств. В задаче о сглаживании равномерно непрерывных функций используется теория и методы аппроксимации в бесконечномерных банаховых пространствах.

Цели на 2015 год, связь с основной задачей Проекта

Получить оценки энтропийных чисел оператора вложения весового класса Соболева на области с условием Джона, а также весовых операторов суммирования и интегрирования на деревьях.

В задаче об изучении структурных свойств чебышёвских множеств и солнц установить, что аппроксимативно компактное m-связное (связное по Менгеру) подмножество банахова пространства является δ-солнцем.

Продолжить исследования приложений жадных алгоритмов.

Найти двухсторонние оценки минимального собственного числа на разных классах функций оператора Штурма–Лиувилля с различными граничными условиями, как в пространствах с ограниченной потенциалом, так и на классе с ограничением только на отрицательную часть потенциала оператора Штурма–Лиувилля.

Изучить связь между существованием непрерывной глобальной и локальной ε-выборкой на подмножество линейного нормированного пространства. Исследовать новые невыпуклые аппроксимирующие объекты на предмет существования непрерывной ε-выборки.

Ожидаемые в конце 2015 г. научные результаты

Получить порядковые оценки энтропийных чисел оператора вложения весового класса Соболева на области с условием Джона с весами, являющимися функциями расстояния до h-множества.

Получить аналогичные результаты для операторов суммирования и интегрирования на деревьях.

Найти оценки сверху и снизу минимального собственного числа на разных классах функций оператора Штурма–Лиувилля с различными граничными условиями.

Установить, что аппроксимативно компактное m-связное (связное по Менгеру) подмножество банахова пространства является δ-солнцем.

Для классических невыпуклых объектов в пространствах непрерывных функций установить существование непрерывной ε-выборки.

Публикации по результатам проекта (этап 2014 г.)

1. Васильева А.А., Поперечники весовых классов Соболева с весами, являющимися функцией расстояния до h-множества // Доклады Академии Наук **459** (2) 142–144 (2014).

2. Алимов А.Р., Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах // Известия Российской академии наук. Серия математическая, **78** (4), 3–18 (2014).

3. Vasil'eva A.A., Embedding theorem for weighted Sobolev classes on a John domain with weights that are functions of the distance to some h-set // Russian Journal of Mathematical Physics **21** (1), 112–122 (2014).

4. Vasil'eva A.A., Widths of weighted Sobolev classes on a John domain: strong singularity at a point // Revista Matematica Complutense **27** (1) 167–212 (2014).

5. Vasil'eva A.A. Embeddings of weighted Sobolev classes on a John domain // Eurasian Math. J. **5** (3), (2014).

6. Алимов А.Р., Выпуклость ограниченных чебышёвских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика **14** (4), 489–497 (2014).

7. Alimov A.R., The Rainwater–Simons weak convergence theorem for the Brown associated norm // Eurasian Mathematical Journal **5** (2), 126–131 (2014).

8. Alimov A.R., Local solarity of suns in normed linear spaces // Journal of Mathematical Sciences **197** (4), 447–454 (2014).

9. Alimov A.R., Monotone path-connectedness and solarity of Menger-connected sets in Banach spaces // Izvestiya. Mathematics **78** (4), 641–655 (2014).

10. Livshitz E.D.; Temlyakov V.N. Sparse Approximation and Recovery by Greedy Algorithms // IEEE Transactions on Information Theory **7**, 3989–4000 (2014).

11. Царьков И.Г., ε-непрерывная выборка для выпуклых множеств в пространствах с хаусдорфовой метрикой // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики. Тула, 15-19 сентября 2014 года ТулГУ 2014. С. 82.

12. Царьков И.Г., Устойчивость однозначной разрешимости для вполне нелинейных эллиптических уравнений двух переменных // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения-XXV» Издательско-полиграфический центр «Научная книга» 2014. С. 191–192.

13. Царьков И.Г., Множества, обладающие непрерывной выборкой из оператора почти наилучшего проектирования // Современные проблемы математики и механики. 2014. Т. 9, №2. С. 54–58.

14. Царьков И.Г., Множества, обладающие непрерывной выборкой из оператора почти наилучшего приближения в несимметричных пространствах // XXII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». VII симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». VII Междисциплинарный семинар «Математические модели и информационные технологии в науке и производстве» СКНЦ ВШ ЮФУ, 2014, С. 98.

15. Васильева А.А., Оценки норм двухвесовых операторов суммирования на дереве при дополнительных условиях на веса // Сборник тезисов 17-й международной Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения", посвященной 150-летию со дня рождения В.А. Стеклова СГУ , 2014, С. 66–68.

16. Алимов А.Р., Теорема Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости для ассоциированной нормы // Сборник тезисов 17-й международной Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения", посвященной 150-летию со дня рождения В.А. Стеклова, СГУ, 2014, С. 19–21.

17. Царьков И.Г., Приближение множеств плоскостями конечной коразмерности // Сборник тезисов 17-й международной Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения", посвя-

щенной 150-летию со дня рождения В.А. Стеклова Издательство «Научная книга» 2014, С. -289.

18. Козко А.И., Попов А.Ю., Оценка снизу собственных чисел оператора Штурма-Лиувилля в $L^2(R_+)$ с граничным условием $y'(0) = 0$ // Сборник тезисов 17-й международнаой Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященной 150-летию со дня рождения В.А. Стеклова Саратовский Государственный Университет, 2014, С. 122–124.

19. Семенова Т.Ю., Приближение функций весового класса кусочно-линейными функциями // Сборник тезисов 17-й международнаой Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященной 150-летию со дня рождения В.А. Стеклова Саратовский Государственный Университет 2014, С. 247–248.