

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»

На правах рукописи

КАЧАЛОВ ВАСИЛИЙ ИВАНОВИЧ

**ГОЛОМОРФНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ**

(Специальность 01.01.02 – *дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление*)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант —
доктор физико-математических наук,
профессор Сафонов В.Ф.

Москва — 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава I. Обычная сходимость асимптотических решений	
 сингулярно возмущенных задач	27
§ 1.1. Пространства векторов экспоненциального типа	28
§ 1.2. Теорема о сходимости основного ряда теории сингулярных возмущений	30
§ 1.3. Использование метода регуляризации С.А. Ломова для получения сходящихся в обычном смысле рядов	32
§ 1.4. Голоморфные по параметру решения сингулярно возмущенных уравнений в случае неограниченного предельного оператора	35
§ 1.5. Эволюция прямого разложения банахова пространства и псевдоголоморфность	42
§ 1.6. Плотность экспоненциальных векторов в пространстве голоморфных функций	50
Глава II. Голоморфная регуляризация сингулярно	
 возмущенных дифференциальных уравнений	
 первого порядка	53
§ 2.1. Коммутационные соотношения и гомоморфизмы алгебр голоморфных функций	53
§ 2.2. Структура гомоморфизмов алгебр голоморфных функций	59
§ 2.3. Гомоморфизмы в теории дифференциальных уравнений	64
§ 2.4. Голоморфные по параметру интегралы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений первого порядка и теорема Пуанкаре о разложении	70
§ 2.5. Псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений первого порядка и метод голоморфной регуляризации	74
§ 2.6. Структура особого многообразия, порождаемого точкой $\varepsilon = 0$	89
§ 2.7. Об оценке точности в методе голоморфной регуляризации	92

Глава III. Уравнения высших порядков и метод голоморфной регуляризации	96
§ 3.1. Уравнения высших порядков и гомоморфизмы алгебр голоморфных функций различного числа переменных	96
§ 3.2. Голоморфные по малому параметру интегралы сингулярно возмущенных уравнений высших порядков	104
§ 3.3. Псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных уравнений высших порядков	107
§ 3.4. Голоморфная регуляризация уравнений второго порядка. Примеры	118
§ 3.5. Голоморфно нерегуляризуемые задачи и гомоморфизмы в качественной теории сингулярных возмущений	125
§ 3.6. О голоморфной регуляризации краевых задач	138
Глава IV. Псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений	152
§ 4.1. Коммутационные соотношения и системы дифферен- циальных уравнений	153
§ 4.2. Голоморфные по малому параметру интегралы сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений	160
§ 4.3. Голоморфные по параметру интегралы уравнения химической кинетики	166
§ 4.4. Псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений	170
§ 4.5. Голоморфная регуляризация линейных систем	183
§ 4.6. Интегралы дифференциальных уравнений в банаховых пространствах	192
§ 4.7. Галёркинские приближения и псевдоголоморфность	197
Литература	205

ВВЕДЕНИЕ

В диссертации изложен метод голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных задач и связанные с ним вопросы гладкости решений сильно нелинейных дифференциальных уравнений по сингулярно входящему параметру с использованием развиваемой автором теории коммутационных соотношений и эквивалентных им гомоморфизмов алгебр голоморфных функций различного числа переменных. В основу диссертации положены идеи С.А. Ломова по созданию на базе метода регуляризации и его обобщений общей теории сингулярных возмущений [40].

Развитие общей теории сингулярных возмущений всегда сопровождалось тесным взаимодействием с такими разделами математики как алгебра и функциональный анализ [12, 26, 52, 69, 70]. Начало развития теории относится к девятнадцатому веку, хотя отдельные результаты были получены и ранее. В 1904 году Прандтль [100] ввел понятие пограничного слоя и получил уравнения, описывающие течение вязкой жидкости в зоне пограничного слоя. Началом систематического развития теории сингулярных возмущений можно считать работы Шлезингера [102] и Биркгофа [97].

Фундаментальное значение в становлении этой теории имеют работы А.Н. Тихонова [80, 81], где доказаны, ныне хорошо известные, теоремы о предельном переходе в нелинейных сингулярно возмущенных задачах. Большой вклад в развитие теории сингулярных возмущений внесли работы В. Вазова [103], М.И. Вишика и Л.А. Люстерника [9], А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова [5—8], Ю.А. Митропольского [55, 56], С.А. Ломова [31—48], А.Н. Филатова [90, 91], Н.И. Шкиля [89], М.В. Федорюка [88], В.П. Маслова [54], В.А. Треногина [84, 85], Н.Н. Моисеева [57], М.И. Иманалиева, К.А. Касимова [21, 23], М.М. Хапаева [93], А.В. Нестерова [60], В.Г. Задорожного [15-17], В.Ф. Сафонова [74-76], А.А. Бободжанова [3,76] и других исследователей [14—20].

С другой стороны, учитывая громоздкость математического аппарата

теории возмущений, важное значение имеют методы и подходы современной качественной теории дифференциальных уравнений. Здесь следует отметить работы И.Н. Сергеева [72] и других специалистов в этой области.

Следует также отметить, что и регулярная теория возмущений, основы которой заложены в трудах Пуанкаре и Ляпунова, получила дальнейшее развитие в работах Реллиха, Секефальви-Надя, Като, Фридрихса, Рида и Саймона. Особое место в теории регулярных возмущений занимает ее аналитический аспект, под которым понимается изучение вопроса обычной сходимости рядов по степеням малого параметра. Чтобы ответить на этот вопрос, в линейном случае ввели понятие голоморфного семейства операторов. Приведем соответствующие определения [24, 68].

Определение 0.1. Операторзначная функция $T(\varepsilon)$ в односвязной области Ω называется *голоморфным семейством* или *голоморфным семейством в смысле Като*, если

а) при всяком $\varepsilon \in \Omega$ оператор $T(\varepsilon)$ замкнут и его резольвентное множество $\rho(T(\varepsilon))$ непусто;

б) при всяком $\varepsilon_0 \in \Omega$ существует некоторое $\lambda_0 \in \rho(T(\varepsilon_0))$ такое, что $\lambda_0 \in \rho(T(\varepsilon))$ при ε близких к ε_0 , и $(T(\varepsilon) - \lambda_0)^{-1}$ есть голоморфная операторзначная функция вблизи ε_0 .

Определение 0.2. Пусть Ω — односвязная область в комплексной плоскости, и пусть для каждого $\varepsilon \in \Omega$ задан $T(\varepsilon)$ — замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством. Говорят, что $T(\varepsilon)$ — голоморфное семейство типа (A) , если

а) операторная область определения $T(\varepsilon)$ есть некоторое множество D , независящее от ε ;

б) $T(\varepsilon)\psi$ есть векторзначная голоморфная функция ε для всякого $\psi \in D$.

Из пункта б) определения 0.1 следует, что если $0 \in \rho(T(0))$, а $T(\varepsilon)$ является голоморфным семейством в смысле Като, то уравнение

$$T(\varepsilon)u = f$$

при любой правой части f имеет единственное решение, голоморфное в

точке $\varepsilon = 0$.

Известно, что каждое семейство типа (A) является голоморфным в смысле Като, при этом справедлива лемма, дающая удобный критерий того, что семейство оператор-функций есть семейство типа (A) .

Лемма 0.1. Пусть H_0 — замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством. Определим $H_0 + \varepsilon V$ на $D(H_0) \cap D(V)$. Тогда $H_0 + \varepsilon V$ есть голоморфное семейство типа (A) вблизи $\varepsilon = 0$ в том и только в том случае, когда

а) $D(V) \supset D(H_0)$;

б) для некоторых a и b и всех $\psi \in D(H_0)$

$$\|V\psi\| \leq a\|H_0\psi\| + b\|\psi\|.$$

При этом, если выполнено условие б), то говорят, что оператор V подчинен оператору H_0 . Условие же а) леммы говорит о том, что она применима только в случае регулярного возмущения и ничего не говорит о том, что будет, когда $D(H_0) \not\subset D(V)$, т.е. возмущение сингулярное. Тем более, что все операторы, участвующие в возмущении, являются линейными.

В нелинейном случае основным результатом регулярной теории возмущений является теорема Пуанкаре о разложении [1, 101]. Приведем ее для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Теорема Пуанкаре. Пусть имеется задача Коши

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= f(z, w, \varepsilon); \\ w(z_0, \varepsilon) &= w_0. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Тогда, если функция $f(z, w, \varepsilon)$ голоморфна в точке $(z_0, w_0, 0)$, то решение $w(z, \varepsilon)$ поставленной задачи является голоморфным в точке $(z_0, 0)$.

Главным здесь является то, что в соответствии с теоремой Гартогса [94], решение $w(z, \varepsilon)$ задачи (0.1) голоморфно в точке $\varepsilon = 0$ равномерно по z на каждом компакте из некоторой окрестности точки z_0 .

Из вышесказанного следует, что аналитический аспект регулярной теории возмущений полностью разработан, и метод малого параметра,

вытекающий из него, позволяет строить решения начальных задач в виде сходящихся рядов по степеням ε .

Следовательно, можно сделать вывод о том, что путем сведения сингулярно возмущенной задачи к регулярной можно получить ее решение в виде сходящегося ряда по степеням малого параметра. Именно таким способом С.А. Ломовым впервые было обнаружено, что ряды решений сингулярно возмущенных задач могут сходиться не только асимптотически, но и в обычном смысле.

Поскольку суть метода регуляризации Ломова как раз и состоит в замене исходной сингулярно возмущенной начальной задачи на регулярно возмущенную, то осталось только найти пространства, в которых выполнялось бы условие б) леммы 0.1. И такие пространства были построены — это пространства векторов экспоненциального типа [66, 67, 104], которые обеспечили обычную сходимостъ регуляризованных асимптотических рядов. Однако, эти пространства оказались очень сложно топологически устроены (см. гл. I), что не позволяло в подавляющем числе практически важных задач получать решения в виде сходящихся рядов. В связи с этим обстоятельством, С.А. Ломовым было введено понятие псевдоаналитического (псевдоголоморфного) решения сингулярно возмущенного уравнения [45, 48, 111].

Для того, чтобы говорить конкретнее, рассмотрим типичную линейную сингулярно возмущенную задачу

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{y} - A(t)y &= h(t), \quad t \in [0, T]; \\ y(0, \varepsilon) &= y_0,\end{aligned}\tag{0.2}$$

где оператор $A(t)$ ограниченный или неограниченный замкнутый действует при каждом $t \in [0, T]$ в банаховом пространстве E . Каждый из асимптотических методов предлагает строить аппроксимации по степеням ε в следующем виде:

$$y_{\varepsilon n}(t, \varepsilon) = y_0(t, \varepsilon) + \varepsilon y_1(t, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^n y_n(t, \varepsilon),\tag{0.3}$$

где коэффициенты также зависят от ε . Связано это с тем, что значение $\varepsilon = 0$ является особым для задачи (0.2). Оно порождает двоякую зависимость решения от ε : сингулярную и регулярную, что позволяет условно

записать решение задачи Коши (0.2) в виде

$$y = Y \left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon \right). \quad (0.4)$$

Определение 0.3. Решение $y(t, \varepsilon)$ задачи (0.2) называется *псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$* , если функция $Y(t, \eta, \varepsilon)$ голоморфна по третьей переменной в точке $\varepsilon = 0$ равномерно по $t \in [0, T]$ при каждом η из некоторого неограниченного множества G . Если же иметь ввиду ряд по степеням ε , частичные суммы которого представлены формулой (0.3), то при каждом фиксированном ε^* в сингулярности ряд

$$Y \left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon^*}, \varepsilon \right) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon^*} \right) \varepsilon^n \quad (0.5)$$

сходится в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (зависящей от ε^* и T) равномерно на отрезке $[0, T]$.

В методе регуляризации Ломова функция $\varphi(t)$, фигурирующая в формулах (0.4) и (0.5) определялась по спектру линейного оператора $A(t)$, причем экспоненты, описывающие сингулярную зависимость от ε , входили в ряд (0.5) линейным образом (см. гл. I), хотя явно об этом в определении 0.3 речи не идет.

Метод голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных задач позволяет рассматривать существенно особые многообразия, порождаемые точкой $\varepsilon = 0$ как линейного, так и нелинейного типа (см. § 2.6). Он вытекает из двух методов: метода линеаризации [4] и метода регуляризации Ломова [40]. Метод линеаризации сводит нелинейную дифференциальную задачу к линейной, которая затем рассматривается с точки зрения метода регуляризации. Алгебраической основой метода голоморфной регуляризации являются коммутационные соотношения и эквивалентные им гомоморфизмы алгебр голоморфных функций различного числа комплексных переменных. В итоге, дифференциальная задача сводится к алгебраической и для нахождения ее решения применяется аппарат теории неявных функций. Перейдем к изложению сути метода.

Пусть задана в комплексной области задача Коши:

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} = f(z, w), \quad w(z_0, \varepsilon) = w_0, \quad (0.6)$$

где правая часть $f(z, w) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0}$ — алгебре функций комплексных переменных (z, w) , голоморфных в точке (z_0, w_0) . От нелинейного уравнения (0.6) перейдем к линейному уравнению интегралов данного дифференциального уравнения:

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} + f(z, w) \frac{\partial U}{\partial w} = 0. \quad (0.7)$$

Считая оператор $\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}$ подчиненным оператору $f(z, w) \frac{\partial}{\partial w}$, будем рассматривать уравнение (0.7) с точки зрения регулярной теории возмущений. Если дополнительно предположить, что $f(z_0, w_0) \neq 0$, то решение этого уравнения может быть найдено в виде ряда по степеням ε :

$$U(z, w, \varepsilon) = U_0(z, w) + \varepsilon U_1(z, w) + \dots + \varepsilon^n U_n(z, w) + \dots \quad (0.8)$$

В соответствии с методом неопределенных коэффициентов, получим следующую серию уравнений:

$$\begin{aligned} f(z, w) \frac{\partial U_0}{\partial w} &= 0, \\ f(z, w) \frac{\partial U_1}{\partial w} &= -\frac{\partial U_0}{\partial z}, \\ &\dots\dots\dots \\ f(z, w) \frac{\partial U_n}{\partial w} &= -\frac{\partial U_{n-1}}{\partial z}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (0.9)$$

В качестве $U_0(z, w)$ можно взять произвольную функцию $\varphi(z)$, зависящую только от одной переменной, из алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ функций, голоморфных в точке z_0 . В итоге,

$$\begin{aligned} U(z, w, \varepsilon) &= \varphi(z) - \varepsilon \int_{w_0}^w \frac{\varphi'(z) dw_1}{f(z, w_1)} + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \frac{\varphi'(z) dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} - \end{aligned} \quad (0.10)$$

$$-\varepsilon^3 \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_2} \frac{\varphi'(z)dw_3}{f(z, w_3)} \right) \frac{dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} + \dots$$

и ряд является сходящимся в некоторой окрестности $\varepsilon = 0$ равномерно на каждом компакте из той окрестности точки (z_0, w_0) , в которой $f(z, w) \neq 0$. Более того, равенство (0.10) задает отображение $A_f^\varepsilon : \mathcal{A}_{z_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0}$, являющееся гомоморфизмом указанных алгебр и удовлетворяющее коммутационному соотношению

$$(A_f^\varepsilon \varphi)(z, w) = \varphi((A_f^\varepsilon z)(z, w)). \quad (0.11)$$

При этом образ $\text{Im } A_f^\varepsilon$ состоит из всех интегралов уравнения (0.6), голоморфных в окрестности точки (z_0, w_0) .

Тем самым, фактически обобщается теорема Пуанкаре о разложении: вместо решений голоморфную зависимость от ε левой части уравнения (0.6) наследуют интегралы этого уравнения. Далее, если потребовать от функции $\varphi(z)$, чтобы $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) \neq 0$, то, представив общий интеграл в виде

$$\begin{aligned} & \int_{w_0}^w \frac{\varphi'(z)dw_1}{f(z, w_1)} - \varepsilon \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \frac{\varphi'(z)dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} + \\ & + \varepsilon^2 \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_2} \frac{\varphi'(z)dw_3}{f(z, w_3)} \right) \frac{dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} - \dots = \frac{\varphi(z)}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (0.12)$$

и обозначив $\frac{\varphi(z)}{\varepsilon}$ через η , мы можем применить к уравнению (0.12) теорему о неявной функции для нахождения решения $w(z, \varepsilon)$ задачи Коши (0.6). Ясно, что найденное таким образом решение является псевдоголоморфным в смысле определения (0.3).

Перейдем к краткому изложению диссертации. Работа состоит из четырех глав. **В первой главе** дан обзор результатов об обычной сходимости регуляризованных асимптотических рядов с использованием теории пространств векторов экспоненциального типа. При этом была применена концепция обобщенных рядов Тейлора в банаховых пространствах. Пусть имеется алгебра $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; \mathcal{L}(E))$ голоморфных в

круге $\mathcal{K}_{z_0}^{\tau_0} = \{z : |z - z_0| < \tau_0\}$ и непрерывных на его замыкании $\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}$ оператор-функций со значениями в $\mathcal{L}(E)$ — пространстве ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве E . Обозначим через $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; E)$ банахово пространство голоморфных в круге $\mathcal{K}_{z_0}^{\tau_0}$ и непрерывных на $\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}$ функций $g(z)$ со значениями в E и с нормой

$$\|g(z)\|_{\mathcal{A}} = \max_{z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}} \|g(z)\|_E.$$

В [108] доказано, что если $B(z), B^{-1}(z) \in \mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; \mathcal{L}(E))$, то для произвольной функции $u(z) \in \mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; E)$ имеет место представление

$$\begin{aligned} u(z) = & u(z_0) + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \cdot (Fu)(z_0) + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \int_{z_0}^{z_1} B(z_2) dz_2 \cdot (F^2 u)(z_0) + \dots + \\ & + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \dots \int_{z_0}^{z_{n-1}} B(z_n) dz_n \cdot (F^n u)(z_0) + \\ & + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \int_{z_0}^{z_1} B(z_2) dz_2 \dots \int_{z_0}^{z_{n-1}} B(z_n) dz_n \int_{z_0}^{z_n} B(z_{n+1}) (F^{n+1} u)(z_{n+1}) dz_{n+1}, \end{aligned}$$

где

$$F = B^{-1}(z) \frac{d}{dz}$$

— замкнутый неограниченный оператор (см. с. 29). При этом, последнее слагаемое в формуле (0.13) является остаточным членом в интегральной форме. В частности, когда $B(z)$ — тождественный оператор, формула (0.13) превращается в обычную формулу Тейлора.

В теории сингулярных возмущений особый интерес представляют такие функции $u(z)$, что при некотором $c > 0$

$$\sup_n \frac{\|F^n u\|_{\mathcal{A}}}{c^n} < \infty.$$

Они названы (см. § 1.1) векторами экспоненциального типа $\leq c$ и являются обобщением целых функций экспоненциального типа [82, 98]. При этом, как

показывают теоремы 1.1 и 1.2, для вектора экспоненциального типа имеет место представление (см. с. 29):

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell_\varepsilon} \frac{U(z, \varepsilon)}{\varepsilon} x(\varepsilon) d\varepsilon,$$

где $x(\varepsilon)$ — голоморфная в точке $\varepsilon = 0$ функция, ℓ_ε — замкнутый контур, охватывающий эту точку, а $U(z, \varepsilon)$ — эволюционный оператор уравнения

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} = B(z)w,$$

в то время, как для целой функции $\varphi(z)$, принадлежащей экспоненциальному типу, справедлива формула Бореля [82]:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell_\varepsilon} \frac{e^{\frac{z}{\varepsilon}}}{\varepsilon} \chi(\varepsilon) d\varepsilon,$$

с некоторой голоморфной в точке $\varepsilon = 0$ функцией $\chi(\varepsilon)$.

Там же (см. с. 28) пространство всех векторов экспоненциального типа, построенных по оператору F топологизировано и обозначено через $\exp_F E$.

§ 1.2 посвящен сходимости так называемого основного ряда теории сингулярных возмущений, т.е. ряда, описывающего в гидродинамике течение вязкой жидкости вне пограничного слоя [48]. Теорема 1.3 на с. 31 утверждает, что если

$$\int_{z_0}^z h(z) dz \in \exp_F E,$$

то уравнение

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} - B(z)w = h(z) \tag{0.14}$$

имеет единственное голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ решение $w(z, \varepsilon)$.

Если же имеется задача Коши для уравнения (0.14), то с помощью метода регуляризации Ломова сначала строится регуляризованный асимптотический ряд, а затем доказывается его обычная сходимость (см. теорему 1.4 на с. 34).

В § 1.3 рассматривается случай, когда $B(z)$ является неограниченным замкнутым оператором. Здесь пришлось привлекать понятие шкалы банаховых пространств, изучать структуру векторов экспоненциального типа (см. теорему 1.5 на с. 37) и строить голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ решение уравнения (0.14) (см. теорему 1.6 на с. 38). Замечено, что в случае неограниченного оператора $B(z)$, пространства векторов экспоненциального типа могут совпадать с хорошо известными в анализе функциональными пространствами (см. теоремы 1.7 и 1.8 на с. 38—40).

Особое место в главе занимает вопрос о связи между эволюцией прямого разложения банахова пространства и псевдоголоморфностью (см. § 1.5), поскольку здесь можно получать результаты об обычной сходимости регуляризованного ряда без явного использования теории пространств векторов экспоненциального типа.

Рассмотрим в банаховом пространстве E уравнение

$$\varepsilon \dot{y} = A(t)y, \quad t \in [0, T], \quad (0.15)$$

в предположении следующего спектрального представления для оператора $A(t)$:

$$A(t) = \lambda_1(t)P_1(t) + \lambda_2(t)P_2(t),$$

где $P_1(t), P_2(t)$ — непрерывно дифференцируемые ортогональные проекторы, раскладывающие при каждом $t \in [0, T]$ пространство E на прямую сумму

$$E = P_1(t)E + P_2(t)E. \quad (0.16)$$

Напомним (см. [27]), что оператором, следящим за эволюцией во времени прямого разложения (0.16), называется обратимый оператор $Q(t)$, удовлетворяющий равенству

$$Q(t)P_k(0) = P_k(t)Q(t), \quad k = 1, 2.$$

Теорема 1.9 на с. 43 утверждает, что если $P_1\dot{P}_1 + P_2\dot{P}_2 = C$, где C — постоянный оператор, то оператор $Q(t) = e^{-tC}$, а эволюционный оператор $U(t, \varepsilon)$ является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$. Но тогда (см. теорему

1.10 на с. 46) уравнение (0.15) имеет псевдоголоморфное в точке $\varepsilon = 0$ решение.

Завершает главу теорема 1.11 на с. 50 о плотности пространства векторов экспоненциального типа в пространстве голоморфных функций со значениями в банаховом пространстве E . Мы придаем важное значение этому утверждению, поскольку оно позволяет при достаточно общих предположениях на данные исходных линейных задач строить приближенные решения, сходящиеся в обычном смысле.

Подход, изложенный в первой главе, отражает начальный этап развития метода голоморфной регуляризации — сначала строится регуляризованный ряд, для которого затем формулируются условия его обычной сходимости. Благодаря такому подходу, была построена (см. [105]) теория обычной сходимости регуляризованных асимптотических рядов для решений линейных сингулярно возмущенных задач. Однако дальнейшее развитие общей теории сингулярных возмущений поставило задачу распространения метода голоморфной регуляризации на нелинейные задачи, причем таким образом, чтобы построенные с помощью этого метода ряды по степеням малого параметра всегда были сходящимися.

В последующих главах диссертации рассмотрена голоморфная регуляризация сильно нелинейных сингулярно возмущенных начальных задач для уравнения первого порядка, уравнений высших порядков и систем в нормальной форме.

Вторая глава занимает центральное место в работе и посвящена применению метода голоморфной регуляризации для обыкновенного сильно нелинейного уравнения первого порядка (0.6). Вначале рассматривается отображение A алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$, удовлетворяющее коммутационному соотношению

$$(Au)(z, w) = u((Az)(z, w)) \quad \forall u(z) \in \mathcal{A}_{z_0}, \quad (0.20)$$

и в теореме 2.1 на с. 55 доказывается, что оно является непрерывным гомоморфизмом этих алгебр. При этом отмечается, что верно и обратное утверждение. В теореме 2.2 (см. с. 57) сформулирован критерий сходимости последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов, осуществляющих гомоморфизм

алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$. Затем приведен простейший пример оператора, удовлетворяющего коммутационному соотношению (0.20). В § 2.2 изучена структура гомоморфизмов алгебр голоморфных функций различного числа переменных. А, именно, доказано (см. теорему 2.3 на с. 59), что линейное отображение $A_f : \mathcal{A}_{z_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0}$, заданное формулой

$$\begin{aligned} (A_f u)(z, w) = & u(z) - \int_{w_0}^w \frac{u'(z) dw_1}{f(z, w_1)} + \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \frac{u'(z) dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} - \\ & - \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_2} \frac{u'(z) dw_3}{f(z, w_3)} \right) \frac{dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} + \dots, \end{aligned} \quad (0.21)$$

где $f(z, w) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0}$ и $f(z_0, w_0) \neq 0$, является непрерывным гомоморфизмом. Более того выяснилось, что $\text{Im } A_f$ содержит все интегралы дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w), \quad (0.22)$$

голоморфные в некоторой окрестности точки (z_0, w_0) , т.е. каждому дифференциальному уравнению вида (0.22) соответствует гомоморфизм A_f алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебр $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$.

В § 2.3 (см. с. 64) показана справедливость обратного утверждения: всякому гомоморфизму алгебр $\mathcal{A}_{z_0}$ и $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$ соответствует вполне определенное дифференциальное уравнение первого порядка. Итогом всех этих рассуждений явилась теорема 2.4 (см. с. 66) о взаимно однозначном соответствии между гомоморфизмами указанных алгебр и дифференциальными уравнениями вида (0.22).

В § 2.4 (см. с. 70) осуществлен переход к сингулярно возмущенному уравнению (0.6). Там сформулирована и доказана теорема 2.5 (см. с. 70), содержание которой отражено в формулах (0.10) и (0.11).

Эти результаты составляют идейную основу метода голоморфной регуляризации: вне зависимости от того входит ли в уравнение малый параметр регулярным либо сингулярным образом, оно при достаточно

общих предположениях имеет голоморфные по нему интегралы. Если говорить более конкретно, то в случае уравнения с двумя параметрами

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} = f(z, w, \mu), \quad (0.23)$$

с правой частью, голоморфной в точке $(z_0, w_0, 0)$, у него существуют интегралы, голоморфные как по ε , так и по μ :

$$\begin{aligned} U(z, w, \varepsilon, \mu) = & \varphi(z) - \varepsilon \int_{w_0}^w \frac{\varphi'(z) dw_1}{f(z, w_1, \mu)} + \\ & + \varepsilon^2 \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \frac{\varphi'(z) dw_2}{f(z, w_2, \mu)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1, \mu)} - \dots, \end{aligned} \quad (0.24)$$

если только $f(z_0, w_0, 0) \neq 0$.

После этого (см. § 2.5, с. 75) дается определение псевдоголоморфного решения сингулярно возмущенного уравнения (0.6) так, как оно понимается в методе голоморфной регуляризации.

Определение 0.4. Решение $w(z, \varepsilon)$ задачи Коши (0.6) называется *псевдоголоморфным* в точке $\varepsilon = 0$, если существует функция $W(z, \eta, \varepsilon)$, голоморфная в точке $(z_0, 0, 0)$, такая, что для любого ε из некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ существует окрестность $\omega_{z_0}^\varepsilon$ точки z_0 , в которой выполняется равенство

$$w(z, \varepsilon) = W\left(z, \frac{\varphi(z)}{\varepsilon}, \varepsilon\right), \quad (0.25)$$

где функция $\varphi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$, $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) \neq 0$.

Если, при этом, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(z, \eta) \varepsilon^n, \quad (0.26)$$

представляющий функцию $W(z, \eta, \varepsilon)$, сходится равномерно на некотором компакте $T_{z_0} \subset \mathbb{C}_z$, содержащем точку z_0 , для каждого η из некоторого неограниченного связного множества $G \subset \mathbb{C}_\eta$ при $|\varepsilon| < \delta$, где $\delta > 0$ и зависит от η , то решение $w(z, \varepsilon)$ называется *псевдоголоморфным в глобальном смысле*.

Теорема 2.6 на с. 76 утверждает существование псевдоголоморфного в точке $\varepsilon = 0$ решения задачи (0.6). Однако, для общей теории сингулярных возмущений, наибольший интерес представляет именно глобальная псевдоголоморфность. А, поскольку, в большинстве практических задач $\varepsilon > 0$ и все переменные действительны, то далее осуществлен переход в вещественную область. Вместо уравнения (0.6) рассматривается уравнение

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0, \varepsilon) = y_0, \quad (0.27)$$

для которого формулируется главный, на наш взгляд, результат главы II (см. теорему 2.7 на с. 77):

Если для некоторой функции $\varphi(x) \in \mathcal{A}_{x_0}$ такой, что $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi'(x_0) < 0 \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \Delta]$, уравнение

$$\varphi'(x) \int_{y_0}^y \frac{dy_1}{f(x, y_1)} = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \quad (0.28)$$

имеет решение $y = Y_0 \left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right)$, равномерно ограниченное при $\varepsilon \rightarrow +0$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$, то решение $y(x, \varepsilon)$ задачи Коши (0.27), определяемое общим интегралом $(A_f^\varepsilon \varphi)(x, y) = 0$, является псевдоголоморфным в глобальном смысле.

Из доказательства теоремы 2.7 следует, что ряд

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \left(x, e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} \right) \varepsilon^n \quad (0.29)$$

сходится при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ из некоторой окрестности нуля равномерно на отрезке $[x_0, \tilde{x}] \subset [x_0, x_0 + \Delta]$, причем в некоторых случаях $\tilde{x} = x_0 + \Delta$. Там же (см. с. 83), выписаны формулы коэффициентов ряда (0.29).

Важным также является замечание на с. 81, из которого следует, что условия теоремы 2.7 будут выполнены, если уравнение

$$\frac{dy}{ds} = f(x, y), \quad (0.30)$$

в котором x выступает в роли параметра, а s — независимой переменной, имеет положительно устойчивые по Лагранжу решения. Если же потребовать асимптотическую устойчивость решений уравнения (0.30), то в соответствии с теоремой А.Н. Тихонова, вместе с глобальной псевдоголоморфностью будет наблюдаться и предельный при $\varepsilon \rightarrow +0$ переход.

Затем (см. теорему 2.8 на с. 84) приведены некоторые свойства интегралов и решений уравнения (0.27), аналогичные тем, которые возникают в теории дифференциальных неравенств [95].

В конце § 2.5 приведены примеры нахождения псевдоголоморфных решений.

В § 2.6 рассматривается структура особого многообразия, порождаемого точкой $\varepsilon = 0$. Поскольку для теории сингулярных возмущений содержательным является случай, когда $w(z, \varepsilon)$ имеет существенную особенность в точке $\varepsilon = 0$, то там сформулирована и доказана на этот счет теорема 2.9 (см. с. 90). В конце этого параграфа дается классификация существенно особых многообразий (см. с. 91).

Завершает вторую главу § 2.7 (см. с. 92), где приведены оценки точности в методе голоморфной регуляризации.

В третьей главе рассмотрены дифференциальные уравнения высших порядков, разрешенные относительно старшей производной.

Обозначим через $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$ алгебру функций $(k+1)$ -й комплексной переменной $(z, w, v_1, \dots, v_{k-1})$, голоморфных в точке $P_0^{k+1}(z_0, w_0, \bar{v}_0)$, где $\bar{v}_0 = (v_{10}, \dots, v_{k-10})$, с введенной в ней топологией индуктивного предела.

Сначала рассматривается задача Коши для уравнения k -го порядка без параметра

$$\frac{d^k w}{dz^k} = f \left(z, w, \frac{dw}{dz}, \dots, \frac{d^{k-1} w}{dz^{k-1}} \right), \quad (0.31)$$

$$w(z_0) = w_0, \quad w'(z_0) = v_{10}, \dots, w^{(k-1)}(z_0) = v_{k-10},$$

которая сводится к задаче Коши для системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dz} = v_1, \\ \frac{dv_1}{dz} = v_2, \\ \\ \frac{dv_{k-2}}{dz} = v_{k-1}, \\ \frac{dv_{k-1}}{dz} = f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}) \end{array} \right. \quad (0.32)$$

$$w(z_0) = w_0, \quad v_1(z_0) = v_{10}, \dots, v_{k-1}(z_0) = v_{k-10}.$$

В теореме 3.1 (см. с. 98) построены гомоморфизмы A_f алгебр $\mathcal{A}_{z_0}$, $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$, $\{\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{m+1}\}_{m=2}^{k-1}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$, образами которых являются интегралы системы (0.32).

Затем для последовательности дифференциальных уравнений возрастающего порядка (см. формулы (3.16) на с. 102) строится точная последовательность алгебр

$$\mathcal{U}_{z_0 w_0}, \mathcal{U}_{z_0 w_0 v_0}^3, \mathcal{U}_{z_0 w_0 v_{10} v_{20}}^4, \dots, \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}, \dots,$$

что завершает § 3.1.

В § 3.2 рассматривается сингулярно возмущенное уравнение порядка $k \geq 3$

$$\varepsilon \frac{d^k w}{dz^k} = f \left(z, w, \frac{dw}{dz}, \dots, \frac{d^{k-1} w}{dz^{k-1}} \right) \quad (0.33)$$

с такими же начальными условиями, что и в задаче (0.31).

Соответствующая ему система имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dz} = v_1, \\ \frac{dv_1}{dz} = v_2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dv_{k-2}}{dz} = v_{k-1}, \\ \varepsilon \frac{dv_{k-1}}{dz} = f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}), \end{array} \right. \quad (0.34)$$

$$w(z_0, \varepsilon) = w_0, \quad v_1(z_0, \varepsilon) = v_{10}, \dots, v_{k-1}(z_0, \varepsilon) = v_{k-10},$$

при этом, в соответствии с терминологией, принятой в теории асимптотического интегрирования, переменные $w, v_1, \dots, v_{k-2}$ называются медленными, а переменная v_{k-1} — быстрой.

Сформулированная на с. 105 теорема 3.2 утверждает существование голоморфного в точке $\varepsilon = 0$ семейства $\{A_f^\varepsilon\}$ непрерывных гомоморфизмов алгебры $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$, причем $\text{Im } A_f^\varepsilon$ состоит из интегралов системы (0.34). Главной особенностью этой теоремы (так же, как и в случае уравнения первого порядка) является то, что она носит глобальный характер.

§ 3.3 (см. с. 107) посвящен изучению вопроса о существовании псевдоголоморфных решений сингулярно возмущенных уравнений высших порядков. Сначала (см. с. 107) дано определение псевдоголоморфного решения, после чего сформулирована и доказана теорема 3.3 (см. с. 109) о существовании такого решения. Главный результат этой главы заключен в теореме 3.4 (см. с. 111), где изучается начальная задача для уравнения

$$\varepsilon \frac{d^k y}{dx^k} = f \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} \right), \quad (0.35)$$

$$y(x_0, \varepsilon) = y_0, \quad y'(x_0, \varepsilon) = v_{10}, \dots, y^{(k-1)}(x_0, \varepsilon) = v_{k-10},$$

рассматриваемого в вещественной области. А, именно, если для некоторой функции $\varphi(x) \in \mathcal{A}_{x_0}$ такой, что $\varphi(x_0) = 0$ и $\varphi'(x) < 0 \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \Delta]$, уравнение

$$\varphi'(x) \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}, v_{k-1}^{(1)})} = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \quad (0.36)$$

имеет решение

$$v_{k-1} = V_{k-1} \left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right),$$

равномерно ограниченное при $\varepsilon \rightarrow +0$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$, то решение $y(x, \varepsilon)$ задачи Коши (0.35) является псевдоголоморфным в глобальном смысле.

Далее изложен алгоритм построения ряда

$$Y(x, \eta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x, \eta) \varepsilon^n, \quad (0.37)$$

представляющего это решение при $\eta = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}$ (см. с. 116). Следует отметить, что и в случае уравнения высокого порядка, сингулярность описывается одной функцией $\varphi(x)$ — это является следствием того факта, что в системе (0.34) только одна быстрая переменная.

В §3.4 отдельно, ввиду практической значимости, рассматривается сингулярно возмущенное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} \varepsilon w'' &= f(z, w, w'), \\ w(z_0, \varepsilon) &= w_0, \quad w'(z_0, \varepsilon) = v_0. \end{aligned} \quad (0.38)$$

Пусть линейный оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial z} + v \frac{\partial}{\partial w}$$

действует в алгебре $\mathcal{U}_{z_0 w_0 v_0}$, тогда теорема 3.2' на с. 119 утверждает, что если $f(z, w, v) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0 v_0}$ и $f(z_0, w_0, v_0) \neq 0$, то отображения $A_f^\varepsilon: \mathcal{A}_{z_0 w_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0 v_0}$, заданные формулой

$$\begin{aligned} (A_f^\varepsilon \varphi)(z, w, v) &= \varphi(z, w) - \varepsilon \int_{v_0}^v \frac{L\varphi dv_1}{f(z, w, v_1)} + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \frac{L\varphi dv_2}{f(z, w, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(z, w, v_1)} - \dots, \end{aligned} \quad (0.39)$$

образуют голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ семейство непрерывных гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}_{z_0 w_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0 v_0}$, удовлетворяющих коммутационному соотношению

$$(A_f^\varepsilon \varphi)(z, w, v) = \varphi((A_f^\varepsilon z)(z, w, v), (A_f^\varepsilon w)(z, w, v)). \quad (0.40)$$

При этом, $\text{Im } A_f^\varepsilon$ состоит из голоморфных по ε интегралов системы

$$\begin{cases} w' = v, \\ \varepsilon v' = f(z, w, v), \end{cases}$$

а интегралы, находящиеся в правой части коммутационного соотношения (0.40), независимы в некоторой окрестности точки (z_0, w_0, v_0) .

С точки зрения физики, интегралы отражают законы сохранения, а, значит, всякому закону сохранения соответствует гомоморфизм алгебр голоморфных функций различного числа переменных.

Аналогом теоремы 3.4 о глобальной псевдоголоморфности служит теорема 3.4', условия которой будут выполнены, если уравнение

$$\frac{d\tilde{v}}{ds} = f(x, y_0, \tilde{v})$$

имеет положительно устойчивые по Лагранжу решения. В конце § 3.4 указаны формулы для коэффициентов ряда, представляющего псевдоголоморфное решение задачи Коши (0.38) и приведены примеры.

§ 3.5 посвящен голоморфно нерегуляризуемым уравнениям второго порядка, т.е. уравнениям с такими правыми частями, что уравнение

$$\varphi'(z) \int_{v_0}^v \frac{dv_1}{f(z, w_0, v_1)} = \frac{\varphi(z)}{\varepsilon}, \quad (0.41)$$

рассматриваемое в комплексной области, не имеет ограниченных решений $v = V_0 \left(z, \frac{\varphi(z)}{\varepsilon} \right)$ ни в какой окрестности точки z_0 , как бы не стремилось к нулю комплексное ε . В данной ситуации речь может идти только о предельном переходе при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. теорему 3.5 на с. 131 и теорему 3.6 на с. 135).

Завершает третью главу § 3.6 о голоморфной регуляризации краевой задачи для уравнения второго порядка.

Четвертая глава, заключительная, посвящена системам дифференциальных уравнений в нормальной форме.

В § 4.1 выводятся коммутационные соотношения и изучаются гомоморфизмы, соответствующие системам без параметра. При этом особое внимание уделяется построению независимых интегралов рассматриваемых систем. Также установлено соответствие между коммутационными соотношениями и системами дифференциальных уравнений.

В § 4.2 рассмотрены сингулярно возмущенные системы вида

[illegible]

для которых строятся голоморфные по ε интегралы, независимые в некоторой окрестности начальной точки $Q_0^{k+1}(z_0, \overline{w}_0)$. Ключевым моментом в этих построениях является интегральный метод решения линейных неоднородных уравнений первого порядка с частными производными [73]. В итоге получен следующий результат: если правые части уравнений системы (0.42) голоморфны в точке Q_0^{k+1} , то у нее существуют k независимых в окрестности указанной точки интегралов

$$\{U^{[0]}(z, \overline{w}, \varepsilon), U^{[1]}(z, \overline{w}, \varepsilon), \dots, U^{[k-1]}(z, \overline{w}, \varepsilon)\},$$

голоморфных в точке $\varepsilon = 0$, что позволяет дополнить теорему Пуанкаре о разложении. Все это составляет содержание теоремы 4.2 (см. с. 166).

Указанный подход был применен в § 4.3 для построения голоморфных по малому параметру интегралов уравнения химической кинетики

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 w}{dz^2} = (w - \varphi(z))^p; \quad p \in \mathbb{N}, \quad (0.43)$$

для которого в предыдущей главе была доказана теорема о предельном переходе.

Однако, для доказательства существования псевдоголоморфных в точке $\varepsilon = 0$ решений системы (0.42) пришлось изменить первые два шага в построении интегралов этой системы, что привело к другим коммутационным соотношениям.

Введем понятие псевдоголоморфного решения сингулярно возмущенной системы.

Определение 0.5. Решение $\overline{w}(z, \varepsilon) = (w_1(z, \varepsilon), \dots, w_k(z, \varepsilon))$ системы (0.42) с начальными условиями

$$w_1(z_0, \varepsilon) = w_{10}, \dots, w_k(z_0, \varepsilon) = w_{k0}$$

называется *псевдоголоморфным* в точке $\varepsilon = 0$, если существуют функции $W_1(z, \eta_1, \dots, \eta_k, \varepsilon), \dots, W_k(z, \eta_1, \dots, \eta_k, \varepsilon)$, голоморфные в точке $(z_0, \underbrace{0, \dots, 0}_k, 0)$ такие, что для любого ε из некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, существует окрестность $\omega_z^\varepsilon \subset \mathbb{C}_z$ точки z_0 , в которой выполнены равенства:

$$\begin{aligned} w_1(z, \varepsilon) &= W_1 \left(z, \frac{\alpha_1(z)}{\varepsilon}, \dots, \frac{\alpha_k(z)}{\varepsilon}, \varepsilon \right), \\ &\dots\dots\dots \\ w_k(z, \varepsilon) &= W_k \left(z, \frac{\alpha_1(z)}{\varepsilon}, \dots, \frac{\alpha_k(z)}{\varepsilon}, \varepsilon \right) \end{aligned} \tag{0.44}$$

для некоторого набора функций $\alpha_1(z), \dots, \alpha_k(z)$ из алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ таких, что $\alpha_m(z_0) = 0, \alpha'_m(z_0) \neq 0 \quad \forall m = \overline{1, k}$.

Если при этом, ряды

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} W_{1n}(z, \eta_1, \dots, \eta_k) \varepsilon^n, \\ & \dots\dots\dots \\ & \sum_{n=0}^{\infty} W_{kn}(z, \eta_1, \dots, \eta_k) \varepsilon^n, \end{aligned} \tag{0.45}$$

представляющие функции (0.44) сходятся равномерно на некотором компакте $T_{z_0} \subset \mathbb{C}_z$, содержащем точку z_0 , при каждом η_m из некоторого неограниченного связного множества $G_m \subset \mathbb{C}_{\eta_m}$, $m = \overline{1, k}$ в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, зависящей от $\eta_1, \dots, \eta_k$, то решение $\overline{w}(z, \varepsilon)$ называется *псевдоголоморфным в глобальном смысле*.

В теореме 4.3 на с. 176 доказано существование псевдоголоморфного в точке $\varepsilon = 0$ решения $w(z, \varepsilon)$ задачи Коши для системы (0.42), а в теореме 4.4 (см. с. 177) — глобальная псевдоголоморфность этого решения

в вещественной области. Более того, если системе

[illegible]

с начальными условиями $y_1(x_0, \varepsilon) = y_{10}, \dots, y_k(x_0, \varepsilon) = y_{k0}$, где все переменные вещественны, а $\varepsilon > 0$, поставить в соответствие автономную, при каждом фиксированном $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$, систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{ds} = f_1(x, y_1, \dots, y_k), \\ \text{.....} \\ \frac{dy_k}{ds} = f_k(x, y_1, \dots, y_k), \end{array} \right. \quad (0.47)$$

решения которой положительно устойчивы по Лагранжу (т.е. $y(x, s)$ равномерно ограничены на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$ при $s \rightarrow +\infty$), то поставленная для системы (0.46) задача Коши будет иметь псевдоголоморфное в глобальном смысле решение

$$\bar{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Y}_n \left(x, e^{\frac{\alpha_1(x)}{\varepsilon}}, \dots, e^{\frac{\alpha_k(x)}{\varepsilon}} \right) \varepsilon^n, \quad (0.48)$$

причем ряд (0.48) сходится равномерно на некотором отрезке $[x_0, \tilde{x}] \subset [x_0, x_0 + \Delta]$ при заданном фиксированном $\varepsilon > 0$ (см. теорему 4.4' на с. 181).

В § 4.5 произведена голоморфная регуляризация линейной сингулярно возмущенной однородной системы с предельным оператором, спектр которого удовлетворяет условиям стабильности [40]. В конце параграфа приведены два примера (один из которых относится к нелинейному случаю).

§ 4.6 посвящен обобщению понятия интеграла дифференциального уравнения в банаховом пространстве, а для сингулярно возмущенного уравнения построены голоморфные по малому параметру интегралы.

Наконец, в § 4.7 изучена глобальная псевдоголоморфность галёркинских приближений сингулярно возмущенного уравнения в банаховом пространстве с базисом. Сформулированная на с. 200 теорема дает достаточные условия существования псевдоголоморфных в глобальном смысле решений у всех систем, построенных по методу Галёркина для данного уравнения. Завершает четвертую главу пример сильно нелинейного уравнения в частных производных второго порядка (см. с. 201).

Таким образом, метод голоморфной регуляризации продемонстрирован как на обыкновенных дифференциальных уравнениях, так и на системах и, поэтому, может быть применен для решения нелинейных задач, возникающих в гидродинамике, квантовой механике и химической кинетике.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [104]—[129].

Результаты работы докладывались на семинаре по теории возмущений под руководством профессоров В.Ф. Сафонова и А.А. Бободжанова в МЭИ; на семинаре МЭИ по дифференциальным уравнениям (руководители — профессора Ю.А. Дубинский и А.А. Амосов); на семинаре физфака МГУ (руководители — профессора А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефёдов); на семинаре мехмата МГУ по качественной теории дифференциальных уравнений (руководители — профессора И.В. Асташова, А.В. Боровских, Н.Х. Розов, И.Н. Сергеев); на семинаре академика Д.В. Аносова в Математическом институте им. Стеклова РАН; на семинаре по асимптотическим методам кафедры Дифференциальных уравнений мехмата МГУ под руководством профессоров А.С. Шамаева и В.В. Жикова; на семинаре кафедры Общей математики ВМК МГУ под руководством академика РАН В.А. Ильина и академика РАН Е.И. Моисеева.

Автор приносит искреннюю благодарность своему научному консультанту профессору В.Ф. Сафонову за внимательное отношение в процессе выполнения данной работы и весьма полезные советы.

ГЛАВА I. ОБЫЧНАЯ СХОДИМОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ

Как уже было сказано во введении, под голоморфной регуляризацией сингулярно возмущенных задач подразумевается построение решений в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра. Первым шагом в этом направлении является нахождение условий обычной сходимости асимптотических рядов, представляющих решения таких задач. В настоящей главе вначале дается обзор результатов, связанных со сходимостью так называемого основного ряда, описывающего решение сингулярно возмущенного уравнения вне "пограничного слоя" [104]. При этом главным инструментом исследования является теория пространств векторов экспоненциального типа [66, 67]. Далее сформулированы условия обычной сходимости регуляризованных рядов, дающих единое описание решений как внутри, так и вне "пограничного слоя". Тем самым дается полное описание существенно особых многообразий линейного типа (см. [105]). Кроме того, указаны некоторые свойства оператора, образом которого являются пространства векторов экспоненциального типа. Установлена связь между псевдоаналитичностью (псевдоголоморфностью) и эволюцией прямого разложения банаховых пространств. Сформулированная при этом теорема дает достаточные условия псевдоголоморфности эволюционного оператора линейного дифференциального уравнения с малым параметром при производной без явного использования пространств векторов экспоненциального типа. Наконец, учитывая сложную структуру пространства векторов экспоненциального типа, сформулирована и доказана теорема о приближении с любой наперед заданной степенью точности произвольной голоморфной функции векторами экспоненциального типа.

§ 1.1. Пространства векторов экспоненциального типа

Пусть оператор $B(z)$ при каждом комплексном z из круга $\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0} = \{z : |z - z_0| \leq \tau_0\}$ действует в банаховом пространстве E . Обозначим через $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; \mathcal{L}(E))$ алгебру голоморфных в круге $\mathcal{K}_{z_0}^{\tau_0} = \{z : |z - z_0| < \tau_0\}$ и непрерывных на его замыкании $\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}$ оператор-функций со значениями в $\mathcal{L}(E)$ — пространстве ограниченных операторов, действующих в E . Предположим, что $B(z), B^{-1}(z) \in \mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; \mathcal{L}(E))$. Наконец, пусть $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; E)$ — пространство голоморфных в круге $\mathcal{K}_{z_0}^{\tau_0}$ и непрерывных на $\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}$ функций $g(z)$ со значениями в E . Ясно, что $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; E)$ — банахово пространство с нормой

$$\|g(z)\|_{\mathcal{A}} = \max_{z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}} \|g(z)\|_E. \quad (1.1)$$

Рассмотрим в $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; E)$ замкнутый неограниченный оператор $F = B^{-1}(z) \frac{d}{dz}$ с областью определения $D(F)$, состоящей из функций, голоморфных на круге $\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}$. Построим банахово пространство, в котором F будет ограниченным (см. [108]). Для этого возьмем элементы $g(z) \in D(F)$ такие, что существует $m(g, c) > 0$, при котором

$$\|F^k g\|_{\mathcal{A}} \leq m(g, c) c^k; \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.2)$$

Здесь $c > 0$ — фиксированное число. Множество таких элементов обозначим через G^c .

Предложение 1.1. Множество G^c с нормой

$$\|g\|_{G^c} = \sup_k \frac{\|F^k g\|_{\mathcal{A}}}{c^k} \quad (1.3)$$

является банаховым пространством [104, 108].

Пространство G^c называется пространством векторов экспоненциального типа $\leq c$ и в нем, как это следует из предложения 1.1, оператор F ограничен, причем $\|F\| \leq c$.

Введем векторное пространство $\exp_F E = \bigcup_{c=1}^{\infty} G^c$, зададим на нем топологию индуктивного предела, т.е.

$$\exp_F E = \lim_{c \rightarrow \infty} \text{ind } G^c$$

и будем называть это пространство — пространством векторов экспоненциального типа.

Теорема 1.1. Пусть $G^c \subset \exp_F E$ — пространство векторов экспоненциального типа $\leq c$ и $B(z), B^{-1}(z) \in \mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; \mathcal{L}(E))$. Тогда любой вектор $u(z) \in G^c$ представим в следующем виде:

$$u(z) = u_0 + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \cdot u_1 + \dots + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \dots \int_{z_0}^z B(z_n) dz_n \cdot u_n + \dots, \quad (1.4)$$

где $u_n \in E$, $n = 0, 1, \dots$, причем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_E \eta^n \quad (1.5)$$

сходится при $\eta : |\eta| < \frac{1}{c}$ и $u_n = (F^n u)(z) \Big|_{z=z_0}$ [108].

Далее, обозначим через $\mathcal{A}(\mathcal{K}_0^r; E)$ — пространство функций, голоморфных в круге $\mathcal{K}_0^r = \{\varepsilon : |\varepsilon| < r\}$ со значениями в банаховом пространстве E . Предположим, что $\mathcal{A}(\mathcal{K}_0^r; E)$ наделено топологией проективного предела [87] (оно является полным, метризуемым и локально выпуклым).

Теорема 1.2. Топологические пространства

$$\tilde{G}^c = \bigcap_{s>c} G^s \quad (1.6)$$

и $\mathcal{A}(\mathcal{K}_0^r; E)$ изоморфны при $r = \frac{1}{c}$, а оператор, осуществляющий этот изоморфизм, задается формулой

$$(\Phi x)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell_\varepsilon} \frac{U(z, \varepsilon)}{\varepsilon} x(\varepsilon) d\varepsilon = u(z), \quad (1.7)$$

где $x(\varepsilon) \in \mathcal{A}(\mathcal{K}_0^r; E)$; $u(z) \in \tilde{G}^c$; ℓ_ε — замкнутый контур, принадлежащий $\mathcal{K}_0^r$ и охватывающий центр этого круга; $U(z, \varepsilon)$ — эволюционный оператор уравнения

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} = B(z)w. \quad (1.8)$$

Следствие из теоремы 1.2. Поскольку

$$\exp_F E = \bigcup_{c=1}^{\infty} \tilde{G}^c, \quad \mathcal{A}_{(\varepsilon=0)} = \bigcup_{r>0} \mathcal{A}(\mathcal{K}_0^r; E),$$

где $\mathcal{A}_{(\varepsilon=0)}$ — пространство голоморфных в точке $\varepsilon = 0$ функций со значениями в банаховом пространстве E , то имеет место общий изоморфизм

$$\exp_F E \Leftrightarrow \mathcal{A}_{(\varepsilon=0)},$$

который осуществляется с помощью оператора Φ .

Доказательство приведенных утверждений см. в [108].

Кроме того, если E конечномерно, а оператор Φ рассматривается действующим в $\mathcal{A}(\mathcal{K}_0^r; E)$, то он обладает счетным числом собственных значений при условии, что спектр $\{\lambda_1(z), \dots, \lambda_m(z)\}$ оператора $B(z)$ простой, а соответствующие собственные векторы $\{\bar{b}_1(z), \dots, \bar{b}_m(z)\}$ образуют базис в E . А именно, числа

$$\{1, \dots, 1, \lambda_1(0), \dots, \lambda_m(0), \dots, \lambda_1^p(0)/p!, \dots, \lambda_m^p(0)/p!, \dots\}$$

образуют его спектр, причем его след конечен и имеет место равенство:

$$Sp\Phi = \sum_{k=1}^m e^{\lambda_k(0)}.$$

§ 1.2. Теорема о сходимости основного ряда теории сингулярных возмущений

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} - B(z)w = h(z), \quad z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0} \quad (1.9)$$

без начального условия и будем определять его решение в виде ряда по степеням комплексного параметра ε :

$$w(z, \varepsilon) = w_0(z) + \varepsilon w_1(z) + \dots + \varepsilon^n w_n(z) + \dots \quad (1.10)$$

В теории сингулярных возмущений ряд (1.10), коэффициенты которого определяются по формулам

$$w_0(z) = -B^{-1}(z)h(z); \quad w_n(z) = B^{-1}(z)w'_{n-1}(z), \quad (1.11)$$

называется основным, что соответствует терминологии, принятой в гидродинамике, где сумму такого ряда называют основным течением вязкой жидкости (вне пограничного слоя). Каким бы методом не решалось уравнение (1.10) с начальными или краевыми условиями, основной ряд или его частичная сумма обязательно присутствует в решении [57, 62, 71, 72].

С помощью введенных в § 1.1 пространств векторов экспоненциального типа можно изучать уравнение (1.9).

Теорема 1.3. *Пусть в уравнении (1.9) правая часть такова, что*

$$\int_{z_0}^z h(z_1)dz_1 \in \exp_F E,$$

и операторы $B(z), B^{-1}(z) \in \mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; \mathcal{L}(E))$. Тогда это уравнение имеет единственное голоморфное по ε решение $w(z, \varepsilon)$, представимое рядом (1.10), сходящимся при $|\varepsilon| < \frac{1}{c}$ равномерно на каждом компакте из $\mathcal{K}_{z_0}^{\tau_0}$, где $c > 0$ — некоторая константа, зависящая от $h(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Действительно, основной ряд в соответствии с методом неопределенных коэффициентов можно представить в виде

$$w(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left(B^{-1}(z) \frac{d}{dz} \right)^n w_0(z), \quad (1.12)$$

где $w_0(z) = -B^{-1}(z)h(z)$ или, пользуясь обозначением для оператора F , в виде

$$w(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (F^n w_0)(z). \quad (1.13)$$

Так как

$$\int_{z_0}^z h(z_1)dz_1 \in \exp_F E,$$

то существует $c > 0$ такое, что

$$\int_{z_0}^z h(z_1) dz_1 \in G^c.$$

Поскольку G^c инвариантно относительно оператора F , то для $\int_{z_0}^z h(z_1) dz_1$ имеет место следующее равенство:

$$F \int_{z_0}^z h(z_1) dz_1 = B^{-1}(z)h(z) = -w_0(z) \in G^c.$$

Значит, $\|F^n w_0(z)\|_{\mathcal{A}} \leq m(w_0, c)c^n$, $n = 0, 1, \dots$ и, следовательно, ряд (1.13) сходится при $|\varepsilon| < \frac{1}{c}$ равномерно на любом компакте из $\mathcal{K}_{z_0}^{\tau_0}$, что и означает голоморфность функции $w(z, \varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$.

Что касается случая, когда $B(z)$ — неограниченный оператор, то получены результаты, аналогичные приведенным, но только с использованием шкалы банаховых пространств (см. [13, 61, 107]).

§ 1.3. Использование метода регуляризации С.А. Ломова для получения сходящихся в обычном смысле рядов

Рассмотрим задачу Коши:

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} - B(z)w = h(z), \quad (1.14)$$

$$w(z_0, \varepsilon) = w_0 \in E. \quad (1.15)$$

Появление начального условия (1.15) приводит, как известно, к появлению "пограничного слоя" и одним основным рядом уже не обойтись. В этих условиях мы вначале получим регуляризованный асимптотический ряд, а затем сформулируем условия его обычной сходимости. Для этого наложим на оператор $B(z)$ следующие условия:

$$1^\circ. B(z) \in \mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; \mathcal{L}(E));$$

2°. Оператор $B(z)$ имеет спектральное разложение

$$B(z) = \sum_{k=1}^m \lambda_k(z) P_k(z),$$

равномерное по $z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}$; попарно дизъюнктивные голоморфные проекторы P_k ($P_i P_j = \delta_{ij} P_i$) образуют полную группу

$$E = \bigoplus_{k=1}^m P_k(z) E,$$

а спектр $\{\lambda_k(z)\}_1^m$ удовлетворяет условиям стабильности:

$$\lambda_k(z) \neq 0, \quad \lambda_i(z) \neq \lambda_j(z) \quad (i \neq j), \quad \forall z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}.$$

Описав сингулярную зависимость решения от ε (по спектру оператора $B(z)$), получим расширенную задачу:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + T_0(z) u &= h(z), \\ u(0, 0, \varepsilon) &= w_0, \end{aligned} \tag{1.16}$$

где

$$T_0(z) = \sum_{k=1}^m \lambda_k(z) \frac{\partial}{\partial \tau_k} - B(z)$$

есть основной оператор; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)$. При этом решения задач (1.16) и (1.14), (1.15) связаны, как известно, соотношением

$$u(z, \tau, \varepsilon) \Big|_{\tau=\varphi(z, \varepsilon)} = w(z, \varepsilon), \quad \varphi_k(z, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \lambda_k(z_1) dz_1, \quad k = \overline{1, m}.$$

Решение задачи (1.16) ищется в виде ряда

$$u(z, \tau, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(z, \tau) \tag{1.17}$$

с коэффициентами из пространства безрезонансных решений

$$\mathcal{U} = \left\{ u(z, \tau) : u = \sum_{k=1}^m u_k(z) \otimes e^{\tau_i} + u_0(z); \quad u_k(z) \in \mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; E) \right\}$$

с нормой

$$\|u(z, \tau)\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k=0}^m \|u_k(z)\|_E.$$

Обозначим через

$$\mathcal{F} = T_0^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z} : \mathcal{A}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{U}},$$

где $\mathcal{A}_{\mathcal{U}} = \mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}; \mathcal{U})$.

Так же как и в §1.1 построим банаховы пространства H^c , инвариантные относительно $\mathcal{F}$, в которых $\mathcal{F}$ будет ограниченным оператором. Для этого возьмем элементы $h(z, \tau) \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ такие, что существует положительное число $M(h, c)$ такое, что

$$\|\mathcal{F}^k h\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}}} \leq M(h, c) c^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

при $c > 0$.

Аналогично предложению 1.1 можно доказать, что H^c с нормой

$$\|h\|_{H^c} = \sup_k \frac{\|\mathcal{F}^k h\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}}}}{c^k}$$

является банаховым пространством. Затем вводим векторное топологическое пространство $\exp_{\mathcal{F}} \mathcal{U}$ с заданной в нем топологией индуктивного предела:

$$\exp_{\mathcal{F}} \mathcal{U} = \lim_{c \rightarrow \infty} \text{ind } H^c.$$

Теорема 1.4. Пусть в уравнении (1.16) правая часть $h(z) = T_0(z)u_0(z, \tau)$, $u_0(z, \tau) \in \exp_{\mathcal{F}} \mathcal{U}$ и $u(z_0, 0) = w_0$. Если для оператора $B(z)$ выполнены условия 1°, 2°, то задача (1.16) имеет единственное голоморфное по ε решение $u(z, \tau, \varepsilon)$, представимое рядом (1.17), сходящимся равномерно на каждом компакте из $\mathcal{K}_{z_0}^{\tau_0}$ при каждом фиксированном τ . При $\tau = \varphi(z, \varepsilon)$ ряд (1.17) является точным решением задачи (1.14), (1.15).

Замечание. Таким образом, голоморфная зависимость левой части уравнения (1.14) от ε наследуется решением задачи (1.16) после выделения существенно особых многообразий линейного типа (см. [45—47]), диктуемых спектром оператора $B(z)$.

Пример к теореме 1.4. Пусть в $\mathbb{C}^2$ задано уравнение

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} - B(z)w = h(z),$$

где

$$B(z) = \begin{pmatrix} -1 & e^z \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; \quad h(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

с начальным условием

$$w(0, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения и соответствующие им собственные векторы следующие:

$$\lambda_1 = -1, \quad \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -3, \quad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} e^t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Основной оператор имеет вид:

$$T_0(z) = -\frac{\partial}{\partial \tau_1} - 3\frac{\partial}{\partial \tau_2} - \begin{pmatrix} -1 & e^z \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Легко найти ряд расширенной задачи, являющийся, как нетрудно видеть, погранслойным ввиду того, что $h(z) \equiv 0$:

$$u(z, \tau, \varepsilon) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\tau_1} + 2\begin{pmatrix} e^t \\ 2 \end{pmatrix} e^{\tau_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left[\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \\ 0 \end{pmatrix} e^{\tau_1} + \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n e^{z+\tau_2}}{2^n} \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Сходимость этого ряда очевидна, причем при

$$\tau_1 = -\frac{z}{\varepsilon}, \quad \tau_2 = -\frac{3z}{\varepsilon}$$

его сумма совпадает с точным решением исходной задачи Коши.

§ 1.4. Голоморфные по параметру решения сингулярно возмущенных уравнений в случае неограниченного предельного оператора

Рассмотрим вопрос о существовании голоморфного в точке $\varepsilon = 0$ решения уравнения

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} - B(x)y = h(x), \tag{1.18}$$

заданного в вещественной области, в случае, когда оператор $B(x)$ является неограниченным при каждом $x \in [x_0, X]$.

Будем предполагать, что оператор $B(x) : E \rightarrow E$ замкнутый, с областью определения $D(B)$, не зависящей от x , причем $B^{-1}(x) \in C([x_0, X]; \mathcal{L}(E))$ — алгебре операторов, непрерывных на отрезке $[x_0, X]$, со значениями из $\mathcal{L}(E)$. Обозначим через C_E пространство $C([x_0, X]; E)$ функций, непрерывных на отрезке $[x_0, X]$, со значениями в банаховом пространстве E и с нормой

$$\|v(x)\|_{C_E} = \max_{x \in [x_0, X]} \|v(x)\|_E,$$

в которой оно банахово.

Последующие построения будут связаны с понятием шкалы банаховых пространств [13, 61]. Пусть s — параметр, изменяющийся на отрезке $[0, 1]$, и каждому значению s соответствует банахово пространство E_s , причем $E_s \subset E_{s'}$, если $s > s'$. Норму элемента u в пространстве E_s будем обозначать через $\|u\|_s$. Пусть $\|u\|_{s'} \leq \|u\|_s$, если $u \in E_s$ и $s > s'$. Обозначим через L_α ($\alpha > 0$) пространство линейных операторов B , определенных в каждом пространстве E_s при $0 < s \leq 1$, переводящих E_s в $E_{s'}$ при любом $s' : 0 \leq s' < s$ и таких, что справедливо неравенство:

$$\|Bu\|_{s'} \leq \frac{\alpha}{s - s'} \|u\|_s, \quad u \in E_s.$$

Если положить

$$\|B\|_{L_\alpha} = \sup_{0 \leq s' < s \leq 1} \sup_{u \in E_s} \{(s - s') \|Bu\|_{s'} \cdot \|u\|_s^{-1}\},$$

то пространство L_α будет банаховым [13]. Рассмотрим в C_E неограниченный замкнутый оператор $F = B^{-1}(x) \frac{d}{dx}$ с областью определения $D(F) = \{v(x) : v'(x) \in C_E\}$. Далее, возьмем элементы $y(x) \in D(F)$, такие что $F^k y \in D(F) \quad \forall k = 1, 2, \dots$, и существует $m(y, C) > 0$ такое, что

$$\|F^k y\|_{C_E} \leq m(y, c) c^k$$

при некоторой константе $c > 0$. Множество таких элементов Y^c с нормой

$$\|y\|_{Y^c} = \sup_k \frac{\|F^k y\|_{C_E}}{c^k}$$

будет банаховым пространством (см. § 1.1). Оно называется пространством векторов экспоненциального типа $\leq c$ и в нем оператор F ограничен, причем $\|F\|_{Y^c} \leq c$. Очевидно, что $Y^c \subset Y^{c'}$ при $c < c'$, поэтому, если на пространстве $\exp_F E = \bigcup_{c=1}^{\infty} Y^c$ задать топологию индуктивного предела, т.е.

$$\exp_F E = \lim_{c \rightarrow \infty} \text{ind } Y^c,$$

то пространство $\exp_F E$ будет полным локально выпуклым топологическим пространством. Оно называется пространством векторов экспоненциального типа.

Теорема 1.5. Пусть $u(x) \in Y^c \subset \exp_F E$, где $E = E_1 \subset \{E_s\}$, $0 \leq s \leq 1$, оператор $B(x) : E \rightarrow E$ является замкнутым неограниченным с областью определения $D(B)$, не зависящей от x , причем $B^{-1}(x) \in C([x_0, X]; \mathcal{L}(E))$. Предположим, что $B(x)$ принимает значения в L_α и непрерывен там при каждом $x \in [x_0, X]$. Тогда для каждого $s \in [0, 1]$ и для любого $x \in [x_0, X_s]$, где $X_s = \min\{X, (1-s)(\alpha c e)^{-1}\}$ справедливо представление

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x B(x_1) dx_1 \cdot u_1 + \dots + \int_{x_0}^x B(x_1) dx_1 \dots \int_{x_0}^{x_{n-1}} B(x_n) dx_n \cdot u_n + \dots, \quad (1.19)$$

сходящееся в E_s равномерно по x на любом компакте, принадлежащем полуинтервалу $[x_0, X_s)$. При этом элементы $u_n \in E_1 = E$ ($n = 0, 1, \dots$) таковы, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_E \eta^n$ сходится при $|\eta| < \frac{1}{c}$.

Теорема 1.5 доказана в [107].

Вернемся к уравнению (1.18). Будем определять его решение в виде ряда по степеням ε :

$$w(x, \varepsilon) = w_0(x) + \varepsilon w_1(x) + \dots + \varepsilon^n w_n(x) + \dots. \quad (1.20)$$

Если этот ряд подставить в (1.18) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε , то получатся следующие соотношения:

$$w_0(x) = -B^{-1}(x)h(x); \quad w_n(x) = Fw_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots. \quad (1.21)$$

Теорема 1.6. Пусть выполнены условия теоремы 1.5 и пусть правая часть уравнения (1.18) $h(x) = B(x)v(x)$. Тогда, если $v(x) \in \exp_F E$, то уравнение (1.18) имеет единственное голоморфное по ε решение $w(x, \varepsilon)$, представимое рядом (1.20) с коэффициентами (1.21), сходящимся в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ равномерно по $x \in [x_0, X_s]$.

Эта теорема доказывается также как теорема 1.4.

Пространства векторов экспоненциального типа в случае неограниченного оператора $B(x)$ оказываются, как правило, шире, чем в случае ограниченного оператора. Иногда $\exp_F E$ совпадает с известными в анализе пространствами. Вернемся снова в комплексную область.

Теорема 1.7. Пусть $B(z)$ — неограниченный замкнутый оператор, действующий при каждом $z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_1}$, $\tau_1 > \tau_0$ в банаховом пространстве E , причем $B^{-1}(z) \in \mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_1}; \mathcal{L}(E))$. Тогда, если существует постоянный замкнутый неограниченный оператор Q , такой что при натуральных n

$$\max_{\substack{|\eta_k - z_0| = \tau_1 \\ k=1, n}} \|B^{-1}(\eta_1) \dots B^{-1}(\eta_n)\| \leq \|Q^{-n}\| \quad (1.22)$$

и резольвента $R(\lambda; Q)$ этого оператора является целой функцией экспоненциального типа, т.е. существуют такие $b, c > 0$, что для всех комплексных λ выполняется неравенство

$$\|R(\lambda; Q)\| \leq c \exp\{b|\lambda|\}, \quad (1.23)$$

то

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}_{z_0}^{\tau_1}; E) = \exp_F E.$$

Приведем доказательство этой теоремы, поскольку оно использует метод оценок, который понадобится в дальнейшем (см. с. 60).

Доказательство. Пусть $u(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{K}_{z_0}^{\tau_1}; E)$. Поскольку $B^{-1}(z) \in \mathcal{A}(\overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_1}; \mathcal{L}(E))$, то по формуле Коши имеем

$$(F^{n+1}u)(z) = \left(\left(B^{-1}(z) \frac{d}{dz} \right)^{n+1} u \right) (z) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} B^{-1}(z) \oint_{|\eta_n - z_0| = r_n} \frac{B^{-1}(\eta_n) d\eta_n}{(\eta_n - z)^2} \oint_{|\eta_{n-1} - z_0| = r_{n-1}} \frac{B^{-1}(\eta_{n-1}) d\eta_{n-1}}{(\eta_{n-1} - \eta_n)^2} \dots \\
&\quad \cdot \oint_{|\eta - z_0| = r} \frac{u(\eta) d\eta}{(\eta - \eta_1)^2}. \tag{1.24}
\end{aligned}$$

Формула (1.24) справедлива при z таких, что $|z - z_0| < r_n < r_{n-1} < \dots < r < \tau_1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что все $r_n > r_0$ и $r_{n-1} - r_n = r_{n-2} - r_{n-1} = \dots = r - r_1 = \frac{r - \tau_0}{n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\|F^{n+1}u\|_{\mathcal{A}} \equiv \max_{z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_0}} \|F^{n+1}u\|_E \leq \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \left(\max_{z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_1}} \|u(z)\|_E \right) \max_{\substack{z, \eta_k \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_1} \\ k=1, n}} \|B^{-1}(z) B^{-1}(\eta_n) \dots B^{-1}(\eta_1)\| H_n,
\end{aligned}$$

где

$$H_n = \oint_{|\eta_n - z_0| = r_n} \frac{|d\eta_n|}{|\eta_n - \tau_0|} \oint_{|\eta_{n-1} - z_0| = r_{n-1}} \frac{|d\eta_{n-1}|}{|\eta_{n-1} - \eta_n|^2} \dots \oint_{|\eta - z_0| = r} \frac{|d\eta|}{|\eta - \eta_1|^2}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
H_n &= \int_0^{2\pi} \frac{r_n d\Theta}{r_n^2 + \tau_0^2 - 2r_n \tau_0 \cos \Theta} \int_0^{2\pi} \frac{r_{n-1} d\Theta}{r_{n-1}^2 + r_n^2 - 2r_{n-1} r_n \cos \Theta} \dots \\
&\quad \cdot \int_0^{2\pi} \frac{r d\Theta}{r^2 + r_1^2 - 2r r_1 \cos \Theta}.
\end{aligned}$$

Известно, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{1 + a^2 - 2a \cos \Theta} = \frac{2\pi}{1 - a^2}. \tag{1.26}$$

Используя формулу (1.26), получим

$$H_n = \frac{(2\pi)^{n+1} r_n r_{n-1} \dots r}{(r_n^2 - \tau_0^2)(r_{n-1}^2 - r_n^2) \dots (r^2 - r_1^2)}.$$

Поскольку $\tau_0 < r_n < r \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned} H_n &\leq \frac{(2\pi)^{n+1} r^{n+1}}{(2\tau_0)^{n+1} (r_n - \tau_0)(r_{n-1} - r_n) \dots (r - r_1)} = \frac{\pi^{n+1} r^{n+1} (n+1)^{n+1}}{\tau_0^{n+1} (r - \tau_0)^{n+1}} = \\ &= \left(\frac{\pi r}{\tau_0 (r - \tau_0)} \right)^{n+1} (n+1)^{n+1} = a^{n+1} (n+1)^{n+1}, \quad a = \frac{\pi r}{\tau_0 (r - \tau_0)}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Далее, так как

$$Q^{n-1} = \frac{1}{(n+1)!} \left. \frac{d^{n+1} R(\lambda; Q)}{d\lambda^{n+1}} \right|_{\lambda=0},$$

а

$$\left\| \left. \frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} R(\lambda; Q) \right|_{\lambda=0} \right\| \leq cb^{n+1},$$

поскольку $R(\lambda; Q)$ — целая функция экспоненциального типа (см. [82, 98]),

то

$$\begin{aligned} \|F^{n+1}u\|_{\mathcal{A}} &\leq c \left(\max_{z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_1}} \|u(z)\|_E \right) \frac{b^{n+1} a^{n+1} (n+1)^{n+1}}{(2\pi)^{n+1} (n+1)!} \leq \\ &\leq c \left(\max_{z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{\tau_1}} \|u(z)\|_E \right) \left(\frac{bae}{2\pi} \right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Таким образом, из (1.28) следует, что $u(z) \in \exp_F E$, и, значит, теорема доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial w}{\partial z} = (z+1) \frac{\partial w}{\partial \xi} + z\xi^2$$

с предельным оператором $B(z) = (z+1) \frac{\partial w}{\partial \xi}$, у которого область определения $D(B) = \{v(\xi) \in \mathcal{A}_0^\xi, v(0) = 0\}$. Здесь $\mathcal{A}_0^\xi$ — алгебра функций комплексной переменной ξ , голоморфных в точке $\xi = 0$. Нетрудно видеть, что $B^{-1}(z)$ является оператором Вольтерра, а значит (см. [22, 108])

$$\max_{\substack{|\eta_k| \leq R \\ k=1, n}} \|B^{-1}(\eta_1) \dots B^{-1}(\eta_n)\| \leq \frac{C(R)M^n(R)}{n!}$$

для некоторых положительных констант C и M .

В связи с теоремой 1.7 данное уравнение имеет единственное голоморфное по ε решение

$$w(z, \xi, \varepsilon) = -\frac{z}{z+1} \frac{\xi^3}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{(-1)^n (2n-1)!! \xi^{n+3}}{(n+3)!(z+1)^{2n+1}},$$

причем ряд, представляющий его, сходится равномерно на любом компакте, принадлежащем множеству $G = \{(z, \xi) : \operatorname{Re} z > -1, \xi \in \mathbb{C}_\xi\}$ в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (зависящей от рассматриваемого компакта).

Подобного рода подход применим также и в случае регулярного возмущения.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения диффузии, с малым коэффициентом диффузии при лапласиане, описывающем процесс диффузии в однородном пространстве без поглощения:

$$u_t = \varepsilon \Delta u + f(x, t), \quad (1.29)$$

$$u(0, x) = \varphi(x). \quad (1.30)$$

Здесь $x \in R^n$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Из формулы Пуассона (см. [10, 53]), дающей решение этой задачи непосредственно, не следует голоморфная зависимость от параметра ε . Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1.8. *Пусть в уравнении (1.29) функция $f(x, t)$ при каждом $t \geq 0$ допускает голоморфное продолжение на $\mathbb{C}^n$, которое является целой функцией, удовлетворяющей оценке:*

$$|f(z, t)| < M e^{\delta |z|^2},$$

где $M = M(t) > 0$, $\delta = \delta(t) > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Предположим, что $\varphi(x)$ из (1.30) также допускает голоморфное продолжение на все пространство $\mathbb{C}^n$ и справедлива оценка

$$|\varphi(z)| < M_1 e^{\delta_1 |z|^2}$$

для некоторых положительных M_1, δ_1 . Тогда для любого $T > 0$ существует единственное голоморфное в некоторой окрестности $S_T = \{\varepsilon :$

$|\varepsilon| < \varepsilon_T\}$ решение задачи Коши (1.29), (1.30), которое, к тому же, на области $S_T \cap (\varepsilon \geq 0)$ принадлежит тихоновскому классу корректности параболических уравнений [79].

Доказательство этой теоремы приведено в [108].

Пример. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Бюргерса:

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx},$$

$$u \Big|_{t=0} = \varepsilon x.$$

В соответствии с [10] сделаем замену:

$$u = -2\varepsilon \frac{\varphi_x}{\varphi}.$$

Тогда исходное уравнение приобретет вид:

$$\varphi_t = \varepsilon \varphi_{xx},$$

$$\varphi \Big|_{t=0} = e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

А эта задача по теореме 1.8 обладает голоморфным в S_T -окрестности $\varepsilon = 0$ решением $\varphi(t, x, \varepsilon)$ при $t \in [0, T]$:

$$\varphi(t, x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4 + 4\varepsilon t}}.$$

Следовательно, уравнение Бюргерса обладает голоморфным по ε решением

$$u(t, x, \varepsilon) = \frac{\varepsilon x}{1 + \varepsilon t}.$$

Этот пример говорит о том, что нелинейные уравнения с малым параметром так же могут иметь голоморфные по этому параметру решения. Тем более, что уравнение Бюргерса является в точности одномерным уравнением Навье—Стокса [63, 70, 83].

§ 1.5. Эволюция прямого разложения банахова пространства и псевдоголоморфность

В произвольном банаховом пространстве E рассматривается дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \dot{y} = A(t)y, \quad t \in [0, T]. \quad (1.31)$$

Пусть оператор $A(t) : E \rightarrow E \quad \forall t \in [0, T]$ допускает следующее спектральное представление:

$$A(t) = \lambda_1(t)P_1(t) + \lambda_2(t)P_2(t), \quad (1.32)$$

где $P_1(t), P_2(t)$ — непрерывно дифференцируемые ортогональные (т.е. $P_1(t)P_2(t) = 0$) проекторы, раскладывающие при каждом $t \in [0, T]$ пространство E на прямую сумму:

$$E = P_1(t)E + P_2(t)E. \quad (1.33)$$

Обозначим через $U(t, \varepsilon)$ эволюционный оператор уравнения (1.31) и дадим следующее определение.

Определение. Оператор $U(t, \varepsilon)$ называется *псевдоголоморфным* в точке $\varepsilon = 0$, если он представим в виде:

$$U(t, \varepsilon) = \mathcal{F} \left(t, \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_1(x) dx \cdot B_1, \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_2(x) dx \cdot B_2, \varepsilon \right), \quad (1.34)$$

где B_1, B_2 — постоянные операторы, действующие в E и коммутирующие с $P_1(0)$ и $P_2(0)$ соответственно, а $\mathcal{F}$ — функция, голоморфная по четвертой переменной в точке $\varepsilon = 0$, при фиксированных $\varepsilon = \varepsilon^*$ и $t \in [0, T]$ в первых трех переменных.

Сформулируем теорему о достаточных условиях псевдоголоморфности в точке $\varepsilon = 0$ эволюционного оператора уравнения (1.31).

Теорема 1.9. Пусть для оператора $A(t)$ выполнено условие (1.32), собственные значения $\lambda_1(t), \lambda_2(t) \in C[0, T]$ и $\lambda_2(t) - \lambda_1(t) = \text{const}$. Тогда, если $P_1\dot{P}_1 + P_2\dot{P}_2 = C$, где C — постоянный оператор, то уравнение (1.31) имеет эволюционный оператор, псевдоголоморфный в точке $\varepsilon = 0$.

Замечание. Как будет видно из доказательства, условие $P_1\dot{P}_1 + P_2\dot{P}_2 = C$ означает, что оператор, следящий за эволюцией прямого разложения (1.33) является целым по t экспоненциального типа (по поводу операторов, следящих за эволюцией прямого разложения банахова пространства переменными проекторами см. [27, 110]). С другой стороны, это означает, что оператор $\dot{P}_k(t)$ ($k = 1, 2$) эквивалентен на многообразии $P_k(t)E$ постоянному оператору C , так как $P_k\dot{P}_k = P_kC$ ($k = 1, 2$).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Сначала построим оператор $Q(t)$, осуществляющий эволюцию прямого разложения (1.33), начиная с момента $t = 0$. Известно [27], что $Q(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dQ}{dt} = -(P_1\dot{P}_1 + P_2\dot{P}_2)Q \quad (1.35)$$

и начальному условию

$$Q(0) = \mathcal{J}. \quad (1.36)$$

Поскольку, по условию теоремы $P_1\dot{P}_1 + P_2\dot{P}_2 = C$ (причем ограниченность оператора C следует из непрерывной дифференцируемости и равномерной на отрезке $[0, T]$ ограниченности проекторов $P_1(t)$ и $P_2(t)$), то очевидно, что

$$Q(t) = e^{-tC}. \quad (1.37)$$

Найдем вид проекторов $P_1(t)$ и $P_2(t)$. Так как $Q(t)$ следит за эволюцией прямого разложения, начиная с момента $t = 0$, то имеют место равенства:

$$Q(t)P_k(0) = P_k(t)Q(t), \quad k = 1, 2. \quad (1.38)$$

Из последнего равенства следует, что

$$P_k(t) = Q(t)P_k(0)Q^{-1}(t), \quad k = 1, 2 \quad (1.39)$$

или, с учетом (1.37):

$$P_k(t) = e^{-tC}P_k(0)e^{tC}, \quad k = 1, 2. \quad (1.40)$$

Вернемся к уравнению (1.31). Будем искать эволюционный оператор $U(t, \varepsilon)$ этого уравнения в виде

$$U(t, \varepsilon) = V(t, \varepsilon)e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_1(x) dx}. \quad (1.41)$$

В итоге, для нахождения оператор-функции $V(t, \varepsilon)$ нужно решить задачу Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{V} &= (A(t) - \lambda_1(t))V, \\ V(0, \varepsilon) &= \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

(в начальном условии через $\mathcal{J}$ обозначен тождественный оператор).

Воспользуемся спектральным представлением (1.32). Тогда уравнение (1.42) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{V} &= (\lambda_1(t)P_1(t) + \lambda_2(t)P_2(t) - \lambda_1(t)P_1(t) - \lambda_1(t)P_2(t))V, \\ V(0, \varepsilon) &= \mathcal{J},\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{V} &= (\lambda_2(t) - \lambda_1(t))P_2(t)V, \\ V(0, \varepsilon) &= \mathcal{J},\end{aligned}\tag{1.43}$$

С помощью формулы (1.40) уравнение (1.43) принимает вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{V} &= (\lambda_2(t) - \lambda_1(t))e^{-tC}P_2(0)e^{tC}V, \\ V(0, \varepsilon) &= \mathcal{J},\end{aligned}\tag{1.44}$$

Умножим обе части этого уравнения слева на оператор e^{tC} :

$$\begin{aligned}\varepsilon e^{tC}\dot{V} &= (\lambda_2(t) - \lambda_1(t))P_2(0)e^{tC}V, \\ V(0, \varepsilon) &= \mathcal{J},\end{aligned}\tag{1.45}$$

Из равенства

$$\frac{d}{dt}(e^{tC}V) = Ce^{tC}V + e^{tC}\dot{V}$$

получим, что

$$e^{tC}\dot{V} = \frac{d}{dt}(e^{tC}V) - Ce^{tC}V.\tag{1.46}$$

Введем оператор-функцию $W(t, \varepsilon) = e^{tC}V(t, \varepsilon)$, тогда с учетом (1.46) задача (1.45) примет вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{W} &= [\varepsilon C + (\lambda_2(t) - \lambda_1(t))P_2(0)]W, \\ W(0, \varepsilon) &= \mathcal{J}.\end{aligned}\tag{1.47}$$

Поскольку $\varepsilon C + (\lambda_2(t) - \lambda_1(t))P_2(0)$ — постоянный ограниченный оператор, то

$$W(t, \varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon} \left[\varepsilon C t + \int_0^t (\lambda_2(x) - \lambda_1(x)) dx \cdot P_2(0) \right]}.\tag{1.48}$$

Если воспользоваться (1.48), то для $V(t, \varepsilon)$ будем иметь:

$$V(t, \varepsilon) = e^{-tC} e^{tC + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (\lambda_2(x) - \lambda_1(x)) dx \cdot P_2(0)}.\tag{1.49}$$

Наконец, из формул (1.41) и (1.49) вытекает формула для эволюционного оператора уравнения (1.31):

$$U(t, \varepsilon) = e^{-tC} e^{tC + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (\lambda_2(x) - \lambda_1(x)) dx \cdot P_2(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_1(x) dx}. \quad (1.50)$$

Так как оператор

$$tC + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (\lambda_2(x) - \lambda_1(x)) dx \cdot P_2(0)$$

коммутирует с оператором

$$\mathcal{J} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_1(x) dx \equiv \frac{1}{\varepsilon} (P_1(0) + P_2(0)) \int_0^t \lambda_1(x) dx,$$

то формулу (1.50) можно представить в виде

$$U(t, \varepsilon) = e^{-tC} e^{tC + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_2(x) dx \cdot P_2(0) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_1(x) dx \cdot P_1(0)} \quad (1.51)$$

и теорема доказана.

Следующая теорема дает достаточные условия того, что $U(t, \varepsilon)g$ $\forall g \in E$ можно представить в виде:

$$U(t, \varepsilon)g = u_1(t, \varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_1(x) dx} + u_2(t, \varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_2(x) dx}, \quad (1.52)$$

где $u_1(t, \varepsilon)$ и $u_2(t, \varepsilon)$ голоморфны в точке $\varepsilon = 0$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Теорема 1.10. *В условиях теоремы 1.9 справедливо представление (1.52).*

Доказательство. Если искать решение уравнения (1.31) в виде (1.52), то для определения $u_k(t, \varepsilon)$ имеют место уравнения:

$$\varepsilon \dot{u}_k = (A(t) - \lambda_k(t) \mathcal{J}) u_k, \quad k = 1, 2. \quad (1.53)$$

Пусть $k = 1$ (доказательство для $k = 2$ аналогично). Тогда, если заменить $u_1(t, \varepsilon)$ на $V(t, \varepsilon)$, то уравнение (1.53) совпадет с уравнением (1.42). Будем считать, что выкладки, включая уравнение (1.47), проделаны.

Пусть $\lambda_2(t) - \lambda_1(t) = a$. Тогда уравнение (1.47) будет представлено в таком виде:

$$\varepsilon \dot{W} - aP_2(0)W = \varepsilon CW. \quad (1.54)$$

Если искать $W(t, \varepsilon)$ в виде

$$W(t, \varepsilon) = W_0(t) + \varepsilon W_1(t) + \dots, \quad (1.55)$$

то для коэффициентов ряда (1.55) получим серию задач:

$$\begin{aligned} P_2(0)W_0 &= 0, \\ aP_2(0)W_{n+1} &= \dot{W}_n - CW_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.56)$$

которая, как известно [44], разрешима.

А теперь сведем уравнение (1.54) к дифференциальному уравнению второго порядка с операторными коэффициентами, являющемуся его следствием. Для этого сначала построим эволюционный оператор уравнения

$$\varepsilon \dot{W} - aP_2(0)W = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} Y(t, \varepsilon) &= e^{\frac{1}{\varepsilon} a P_2(0) t} = \mathcal{J} + \frac{a}{\varepsilon} P_2(0) t + \dots + \frac{P_2^n(0) a^n t^n}{\varepsilon^n n!} + \dots = \\ &= P_1(0) + P_2(0) + \frac{at}{\varepsilon} P_2(0) + \dots + \frac{a^n t^n}{\varepsilon^n n!} P_2(0) + \dots = \\ &= P_1(0) + P_2(0) e^{\frac{at}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

С помощью этого оператора (см. [27]) задачу (1.54) можно свести к интегральному уравнению:

$$W(t, \varepsilon) = \int_0^t (P_1(0) + P_2(0) e^{\frac{a(t-s)}{\varepsilon}}) CW(s, \varepsilon) ds + \mathcal{J}. \quad (1.57)$$

Дифференцируя (1.57) по t , получим

$$\dot{W} = P_1(0)CW + \frac{a}{\varepsilon} \int_0^t P_2(0)C e^{\frac{a(t-s)}{\varepsilon}} W(s, \varepsilon) ds + P_2(0)CW.$$

Если воспользоваться уравнением (1.57), то предыдущее уравнение станет таким:

$$\dot{W} = CW + \frac{a}{\varepsilon} \left(W - \int_0^t P_1(0)CW(s, \varepsilon)ds - \mathcal{J} \right).$$

Наконец, продифференцировав это уравнение, получим искомое уравнение второго порядка:

$$\varepsilon \ddot{W} - \varepsilon C \dot{W} = a \dot{W} - a P_1(0)CW. \quad (1.58)$$

Будем искать решение уравнения (1.58) в виде ряда (1.55) по степеням ε . Тогда для $W_n(t)$ справедливы формулы:

$$\begin{aligned} W_0 - P_1(0)CW_0 &= 0, \\ aW_{n+1} - aP_1(0)CW_{n+1} &= \ddot{W}_n - C\dot{W}_n, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (1.59)$$

С помощью равенств (1.59) легко последовательно получить все $W_n(t)$ (также как и в случае уравнения (1.54), они определяются неоднозначно):

$$\begin{aligned} W_0 &= e^{P_1(0)Ct}, \\ W_1 &= \frac{1}{a} \int_0^t e^{P_1(0)C(t-s)} D e^{P_1(0)Cs}; \quad D \stackrel{\text{def}}{=} [P_1(0)C, CP_1(0)], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Из анализа формул для W_n видно, что следующее обыкновенное дифференциальное уравнение является мажорирующим для уравнения (1.58):

$$\varepsilon \ddot{z} + \varepsilon \|C\| \dot{z} = a \dot{z} - a \|P_1(0)C\| z. \quad (1.60)$$

Если уравнение (1.60) имеет голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ решение, то это решение мажорирует решение уравнения (1.59). Ну а то, что уравнение (1.60) имеет голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ решение, проверяется непосредственным построением такого:

$$z(t, \varepsilon) = e^{\frac{(a - \varepsilon \|C\|) - \sqrt{(\varepsilon \|C\| - a)^2 - 4\varepsilon a \|P_1(0)C\|}}{2\varepsilon}} t}.$$

Из этой формулы видна также область аналитичности решения (1.58) (по ε).

Далее, так как уравнение (1.58) является следствием уравнения (1.54), то всякое решение уравнения (1.54) является также и решением уравнения (1.58). Но все регулярные (т.е. в виде ряда по степеням ε) решения уравнения (1.58) голоморфны по ε , значит, таковыми являются и регулярные решения уравнения (1.54).

Таким образом, уравнение (1.53) при $k = 1$ имеет голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ решение. Аналогичное утверждение имеет место, очевидно, и для $k = 2$ в уравнении (1.33). Это и завершает доказательство теоремы.

Пример. Пусть $E = \mathbb{R}^2$ и

$$A(t) = \begin{pmatrix} 4 \cos^2 t & e^t \\ e^{-t} & 4 \cos^2 t \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Тогда $\lambda_1 = 1 + 2 \cos 2t$, $\lambda_2(t) = 3 + 2 \cos 2t$. Спектральные проекторы такие:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{(\lambda_1)} (A(t) - \lambda \mathcal{J})^{-1} d\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}e^t \\ -\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ P_2(t) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{(\lambda_2)} (A(t) - \lambda \mathcal{J})^{-1} d\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}e^t \\ \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Методом подсчета найдем, что

$$P_1 \dot{P}_1 + P_2 \dot{P}_2 = C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Значит, оператор $Q(t)$, осуществляющий эволюцию прямого разложения пространства $\mathbb{R}^2$ переменными проекторами (1.62), как это следует из (1.35), (1.36), такой:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}.$$

При этом, равенства (1.38) легко проверяются непосредственным перемножением матриц. Ясно, что условия теоремы 1.10 выполнены. В итоге,

$$U(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} e^{\frac{(\varepsilon+2-\sqrt{\varepsilon^2+4})t}{2\varepsilon}} & e^{\frac{(\varepsilon-2+\sqrt{\varepsilon^2+4})t}{2\varepsilon}} \\ e^{-t} e^{\frac{(\varepsilon+2-\sqrt{\varepsilon^2+4})t}{2\varepsilon}} \cdot \frac{\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2} & e^{-t} e^{\frac{(\varepsilon-2+\sqrt{\varepsilon^2+4})t}{2\varepsilon}} \cdot \frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\frac{t+\sin 2t}{\varepsilon}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{3t+\sin 2t}{\varepsilon}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2\sqrt{\varepsilon^2+4}} & -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+4}} \\ \frac{-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2\sqrt{\varepsilon^2+4}} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+4}} \end{bmatrix}$$

Заметим, что последняя матрица с элементами, независимыми от t , являются нормировочной, благодаря ей $V(0, \varepsilon) = \mathcal{J}$.

§ 1.6. Плотность экспоненциальных векторов в пространстве голоморфных функций

В § 1.1 показано, что векторов экспоненциального типа, грубо говоря, столько же, сколько и голоморфных функций (см. теорему об изоморфизме). Тем не менее, ввиду сложной структуры пространства векторов экспоненциального типа, возникает вопрос о приближении голоморфных функций экспоненциальными векторами. В случае целых функций экспоненциального типа этот вопрос решается просто: любую голоморфную функцию можно приблизить с любой наперед заданной точностью многочленами, которые, как известно, являются целыми функциями экспоненциального типа (т.е. векторами экспоненциального типа, построенными по оператору дифференцирования (см. [82, 96])). Следующая теорема является обобщением этого результата на произвольное банахово пространство.

Теорема 1.11. Пусть $B(z), B^{-1}(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{K}_{z_0}^{\tau_0}; \mathcal{L}(E))$. Тогда при некотором $r > 0$ пространство $\exp_F E$ плотно в $\mathcal{A}(\mathcal{K}_{z_0}^r; E)$ в том смысле, что замыкание $\exp_F E$ в топологии $\mathcal{A}(\mathcal{K}_{z_0}^r; E)$ совпадает с $\mathcal{A}(\mathcal{K}_{z_0}^r; E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Непосредственным подсчетом легко проверяется обобщенная формула Тейлора для произвольной $u(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{K}_{z_0}^{\tau_0}; E)$:

$$\begin{aligned}
u(z) &= u(z_0) + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \cdot (Fu)(z_0) + \dots + \\
&+ \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \int_{z_0}^z B(z_2) dz_2 \dots \int_{z_0}^{z_{n-2}} B(z_{n-1}) dz_{n-1} \cdot (F^{n-1}u)(z_0) + \\
&+ \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \dots \int_{z_0}^{z_{n-2}} B(z_{n-1}) dz_{n-1} \int_{z_0}^{z_{n-1}} B(z_n) \cdot (F^n u)(z_n) dz_n.
\end{aligned} \tag{1.63}$$

(Кстати, при $B(z) = \mathcal{J}$ получается обычная формула Тейлора.)

Теорему докажем, установив предварительно, что остаточный член $R_n(z)$ в формуле (1.63) стремится к нулю в топологии $\mathcal{A}(\mathcal{K}_{z_0}^r; E)$ при некотором $r > 0$, когда $n \rightarrow \infty$. Оценим сначала $(F^n u)(z)$ так же как и в § 1.4, применив интегральную формулу Коши. Имеем,

$$\begin{aligned}
(F^k u)(z) &= \frac{B^{-1}(z)}{(2\pi i)^n} \oint_{|\eta_{n-1}-z_0|=r_{n-1}} \frac{B^{-1}(\eta_{n-1}) d\eta_{n-1}}{(\eta_{n-1} - z)^2} \cdot \\
&\cdot \oint_{|\eta_{n-2}-z_0|=r_{n-2}} \frac{B^{-1}(\eta_{n-2}) d\eta_{n-2}}{(\eta_{n-2} - \eta_{n-1})^2} \dots \oint_{|\eta-z_0|=r_0} \frac{u(\eta) d\eta}{(\eta - \eta_1)^2}.
\end{aligned} \tag{1.64}$$

В формуле (1.64) предполагается, что $z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^a$, причем a и r_0 фиксированы и $a < r_{n-1} < \dots < r_1 < r_0 < \tau_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Возьмем $\{r_m\}_{m=1}^{n-1}$ так, что

$$r_{n-1} - a = r_{n-2} - r_{n-1} = \dots = r_0 - r_1 = \frac{r_0 - a}{n}.$$

Тогда, как это следует из формулы (1.64), справедливо неравенство

$$\max_{z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^a} \|F^n u\|_E \leq \frac{b}{(2\pi)^n} \cdot \max_{z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{r_0}} \|u(z)\|_E \cdot H_n, \tag{1.65}$$

в котором

$$b = \max_{z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{r_0}} \|B^{-1}(z)\|_{\mathcal{L}(E)}$$

и

$$H_n = \oint_{|\eta_{n-1}-z_0|=r_{n-1}} \frac{|d\eta_{n-1}|}{|\eta_{n-1} - z|^2} \oint_{|\eta_{n-2}-z_0|=r_{n-2}} \frac{|d\eta_{n-2}|}{|\eta_{n-2} - \eta_{n-1}|^2}.$$

$$\oint_{|\eta-z_0|=r_0} \frac{|d\eta|}{|\eta-\eta_1|^2} = \frac{(2\pi)^n r_{n-1} r_{n-2} \dots r_0}{(r_{n-1}^2 - |z|^2)(r_{n-2}^2 - r_{n-1}^2) \dots (r_0^2 - r_1^2)}$$

(см. формулы (1.24)–(1.27)).

Но, $r_{n-1} + |z| \geq 2a$ и $r_{n-m} + r_{n-m+1} > 2a \quad \forall m = \overline{2, n}$, значит

$$H_n \leq \frac{(2\pi)^n r_0^n}{(2a)^n \left(\frac{r_0-a}{n}\right)^n} = \left[\frac{\pi r_0}{a(r_0-a)} \right]^n n^n. \quad (1.66)$$

Поэтому, из (1.65) с учетом (1.66) следует, что

$$\max_{z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^a} \|F^n u\|_E \leq \left[\frac{br_0}{2a(r_0-a)} \right]^n n^n \max_{z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{r_0}} \|u(z)\|_E.$$

Теперь оценим остаточный член $R_n(z)$:

$$\|R_n(z)\| \leq \frac{|z-z_0|^n}{n!} d^n \left[\frac{br_0}{2a(r_0-a)} \right]^n n^n, \quad \forall z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^a;$$

здесь $d = \max_{z \in \overline{\mathcal{K}}_{z_0}^{r_0}} \|A(z)\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Пользуясь признаком Даламбера, получим, что $\|R_n(z)\|_{E_r} \Rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ на любом компакте, принадлежащем кругу $\mathcal{K}_{z_0}^r$, где

$$r = \frac{2a(r_0-a)e}{db r_0}.$$

Это и означает, что любую функцию $u(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{K}_{z_0}^{r_0}; E)$ на круге $\mathcal{K}_{z_0}^r$ можно приблизить векторами экспоненциального типа

$$u(z_0) + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \cdot (Fu)(z_0) + \dots + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \dots \int_{z_0}^{z_{n-2}} B(z_{n-1}) dz_{n-1} \cdot (F^{n-1}u)(z_0)$$

сколь угодно близко. Это рассуждение и завершает доказательство теоремы о плотности.

ГЛАВА II. ГОЛОМОРФНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В этой главе указан метод построения интегралов дифференциальных уравнений первого порядка, основанный на коммутационных соотношениях и эквивалентных им гомоморфизмах алгебр голоморфных функций различного числа переменных. Вначале рассматриваются уравнения без параметра, а затем обобщается известная теорема Пуанкаре о разложении на случай уравнения с малым параметром при производной. Далее вводится понятие псевдоголоморфного решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения первого порядка и формулируются достаточные условия глобальной псевдоголоморфности. Все это составляет содержание метода голоморфной регуляризации, являющегося логическим продолжением метода регуляризации С.А. Ломова. Суть метода голоморфной регуляризации состоит в следующем: вместо исходного нелинейного сингулярно возмущенного уравнения рассматривается линейное уравнение его интегралов, в котором оператор, содержащий малый параметр ε , является подчиненным и, благодаря этому, интегралы ищутся в виде сходящихся рядов по степеням ε . Само же решение исходной задачи Коши может быть представлено с помощью теоремы о неявной функции как ряд специального вида.

§ 2.1. Коммутационные соотношения и гомоморфизмы алгебр голоморфных функций

Обозначим через Z множество целых чисел, а через $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. Пусть $\{\omega_{z_0}^\alpha\}$ — база окрестностей точки z_0 на комплексной плоскости $\mathbb{C}_z$, где $\alpha \in Z$ и $\omega_{z_0}^\alpha \subset \omega_{z_0}^{\alpha'}$, если $\alpha > \alpha'$. Обозначим через $\mathcal{A}(\omega_{z_0}^\alpha)$ алгебру функций $u : \omega_{z_0}^\alpha \rightarrow \mathbb{C}$, голоморфных в $\omega_{z_0}^\alpha$, оснащенную топологией проективного предела [87]. Здесь и в дальнейшем

рассматриваются алгебры относительно умножения. Очевидно, что $\mathcal{A}(\omega_{z_0}^\alpha) \supset \mathcal{A}(\omega_{z_0}^{\alpha'})$, когда $\alpha > \alpha'$, и вложения непрерывны вместе с топологиями. Обозначим через

$$\mathcal{A}_{z_0} = \bigcup_{\alpha \in Z} \mathcal{A}(\omega_{z_0}^\alpha)$$

алгебру ростков в точке z_0 голоморфных функций одной комплексной переменной z и зададим на ней топологию индуктивного предела [22]:

$$\mathcal{A}_{z_0} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +\infty \\ (\alpha \in Z)}} \text{ind } \mathcal{A}(\omega_{z_0}^\alpha).$$

Напомним, что последовательность $\{u_n(z)\}_{n=1}^\infty$ является сходящейся к $u(z)$ в $\mathcal{A}_{z_0}$, если существует $\alpha \in Z$ такое, что $u_n(z), u(z) \in \mathcal{A}(\omega_{z_0}^\alpha)$ и там сходится (в топологии проективного предела, т.е. равномерно на каждом компакте из $\omega_{z_0}^\alpha$). При этом будем писать

$$u_n(z) \xrightarrow{\mathcal{A}_{z_0}} u(z).$$

Если же нужно подчеркнуть сходимость в $\mathcal{A}(\omega_{z_0}^\alpha)$, то

$$u_n(z) \xrightarrow{\mathcal{A}(\omega_{z_0}^\alpha)} u(z).$$

Далее, пусть $\{\Omega_{z_0 w_0}^{\beta\gamma}\}$ — база окрестностей точки (z_0, w_0) на $\mathbb{C}_{zw} = \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w$, где $\mathbb{C}_w$ — комплексная плоскость переменной w ; $\beta, \gamma \in Z$ и $\Omega_{z_0 w_0}^{\beta\gamma} \subset \Omega_{z_0 w_0}^{\beta'\gamma'}$, как только $\beta > \beta'$, $\gamma > \gamma'$. Обозначим через $\mathcal{U}(\Omega_{z_0 w_0}^{\beta\gamma})$ алгебру функций $U : \Omega_{z_0 w_0}^{\beta\gamma} \rightarrow \mathbb{C}$, голоморфных в $\Omega_{z_0 w_0}^{\beta\gamma}$ с топологией проективного предела, и пусть, по аналогии с предыдущим,

$$\mathcal{U}_{z_0 w_0} = \lim_{\substack{\beta \rightarrow +\infty \\ \gamma \rightarrow +\infty \\ (\beta, \gamma \in Z)}} \text{ind } \mathcal{U}(\Omega_{z_0 w_0}^{\beta\gamma})$$

— алгебра ростков в точке (z_0, w_0) голоморфных функций двух комплексных переменных z и w . Обе алгебры, очевидно, являются коммутативными.

В следующей теореме рассматривается один важный класс отображений алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$.

Теорема 2.1. *Если оператор*

$$A: \mathcal{A}_{z_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0} \quad (2.1)$$

удовлетворяет коммутационному соотношению

$$\begin{aligned} (Au)(z, w) &= u((Az)(z, w)), \\ u(z) &\in \mathcal{A}_{z_0}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

то он является непрерывным гомоморфизмом алгебр и, наоборот, всякий непрерывный гомоморфизм (2.1) удовлетворяет соотношению (2.2).

Замечание. Соотношение (2.2) названо коммутационным, так как из него следует, что отображение A коммутирует с отображением $u: \omega_{z_0}^\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ при некотором $\alpha \in Z$ на элементе $z \in \mathcal{A}_{z_0}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Прежде всего докажем линейность оператора A . Действительно, если $\lambda \in \mathbb{C}$ и $u(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$, то

$$(A(\lambda u))(z, w) = \lambda u((Az)(z, w)) = \lambda(Au)(z, w);$$

если $u_1(z), u_2(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$, то

$$\begin{aligned} (A(u_1+u_2))(z, w) &= (u_1+u_2)((Az)(z, w)) = u_1((Az)(z, w)) + u_2((Az)(z, w)) = \\ &= (Au_1)(z, w) + (Au_2)(z, w), \end{aligned}$$

и линейность оператора A доказана.

Далее, пусть

$$u_n(z) \xrightarrow{\mathcal{A}_{z_0}} u(z).$$

Это означает, что существует $\alpha \in Z$ такое, что

$$u_n(z) \xrightarrow{\mathcal{A}(\omega_{z_0}^\alpha)} u(z).$$

Пусть $U_n(z, w) = (Au_n)(z, w) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0}$, $U(z, w) = (Au)(z, w) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0}$ и $U_0(z, w) = (Az)(z, w)$. Будем считать, что α, β, γ столь велики (т.е. $\omega_{z_0}^\alpha$, $\Omega_{z_0 w_0}^{\beta\gamma}$ столь малы), что

$$E(U_0(z, w)) \subset \omega_{z_0}^\alpha,$$

где $E(U_0(z, w))$ — область значений U_0 , как функции, если $(z, w) \in \Omega_{z_0 w_0}^{\beta\gamma}$, а z рассматривается как элемент $\mathcal{A}(\omega_{z_0}^\alpha)$. Тогда, имеем

$$\begin{aligned} U_n(z, w) &= (Au_n)(z, w) = u_n((Az)(z, w)) \xrightarrow{\mathcal{U}(\Omega_{z_0 w_0}^{\beta\gamma})} u((Az)(z, w)) = \\ &= u(U_0(z, w)) = (Au)(z, w) = U(z, w). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$U_n(z, w) \xrightarrow{\mathcal{U}_{z_0 w_0}} U(z, w)$$

или

$$(Au_n)(z, w) \xrightarrow{\mathcal{U}_{z_0 w_0}} (Au)(z, w),$$

если $u_n \xrightarrow{\mathcal{A}_{z_0}} u$, и непрерывность отображения A доказана.

Теперь докажем, что оператор A является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$. В самом деле, пусть $u_1, u_2 \in \mathcal{A}_{z_0}$, тогда

$$\begin{aligned} (A(u_1 u_2))(z, w) &= (u_1 u_2)((Az)(z, w)) = u_1((Az)(z, w)) u_2((Az)(z, w)) = \\ &= (Au_1)(z, w) (Au_2)(z, w), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Докажем обратное. Пусть A — непрерывный гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$. В частности, это означает, что

$$(A(z - z_0)^k)(z, w) = ((A(z - z_0))(z, w))^k, \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

Возьмем произвольную функцию $u(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$. Так как $u(z)$ голоморфна в точке z_0 , то

$$u(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_k(z - z_0)^k + \dots,$$

$$c_k \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Имеем, ввиду непрерывности оператора A :

$$\begin{aligned} (Au)(z, w) &= A(c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_k(z - z_0)^k + \dots) = \\ &= c_0(A(1)) + c_1(A(z - z_0)) + c_2(A(z - z_0))^2 + \dots + c_k(A(z - z_0))^k + \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_0 + c_1(A(z - z_0)) + c_2(A(z - z_0))^2 + \dots + c_k(A(z - z_0))^k + \dots = \\
&= c_0 + c_1(Az - Az_0) + c_2(Az - Az_0)^2 + \dots + c_k(Az - Az_0)^k + \dots = \\
&= c_0 + c_1(Az - z_0) + c_2(Az - z_0)^2 + \dots + c_k(Az - z_0)^k + \dots = \\
&= u((Az)(z, w)).
\end{aligned}$$

Итак,

$$(Au)(z, w) = u((Az)(z, w)),$$

и коммутационное соотношение доказано. При этом в предыдущих формулах мы опустили аргументы образов оператора A для упрощения записи, а также воспользовались тем, что $A(1) = 1$ и $A(z_0) = A(z_0 \cdot 1) = z_0 \cdot A(1) = z_0$. В итоге, теорема 2.1 доказана полностью.

Следующая теорема дает критерий сходимости последовательности непрерывных гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов, удовлетворяющих коммутационному соотношению (2.2) была сильно сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась на элементе $z \in \mathcal{A}_{z_0}$. При этом предельный оператор A также подчинен коммутационному соотношению.*

До к а з а т е л ь с т в о . Необходимость очевидна. Докажем достаточность.

По условию теоремы, последовательность $\{(A_n z)(z, w)\}_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся в $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$. Обозначим ее предел через $U_0(z, w)$. Поскольку операторы A_n удовлетворяют коммутационному соотношению, то

$$(A_n u)(z, w) = u((A_n z)(z, w)) \xrightarrow{\mathcal{U}_{z_0 w_0}} u(U_0), \quad \forall u(z) \in \mathcal{A}_{z_0}.$$

Определим оператор A по формуле:

$$(Au)(z, w) \equiv u(U_0).$$

При $u(z) = z$ имеем:

$$(Az)(z, w) = U_0(z, w),$$

отсюда

$$(Au)(z, w) = u((Az)(z, w)),$$

т.е. оператор A удовлетворяет коммутационному соотношению. Теорема доказана.

Замечание. Операторы, удовлетворяющие коммутационному соотношению (2.2), обладают следующим важным свойством: сильная сходимость таких операторов эквивалентна их сходимости всего лишь на одном элементе (ср. с теоремой Банаха—Штейнгауза [86]).

Приведем простейший пример оператора A , удовлетворяющего коммутационному соотношению (2.2). Пусть $z_0 = 0$ и $w_0 = 1$. Рассмотрим оператор $A: \mathcal{A}_{z_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0}$, заданный формулой

$$(Au)(z, w) = u(z) + \frac{\ln w}{1!}u'(z) + \frac{\ln^2 w}{2!}u''(z) + \dots + \frac{\ln^n w}{n!}u^{(n)}(z) + \dots \quad (2.4)$$

Прежде всего докажем, что ряд (2.4) сходится в некоторой окрестности точки $(0, 1) \in \mathbb{C}_{zw}$. Для этого окружим точку $z_0 = 0$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}_z$ двумя контурами:

$$\gamma_1 = \{z: |z| = \rho\} \text{ и } \gamma_2 = \{z: |z| = R\}, \quad R > \rho > 0,$$

так, чтобы контур γ_2 попал целиком в окрестность голоморфности функции $u(z)$. Тогда, в соответствии с интегральной формулой Коши,

$$u^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{u(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}},$$

$\forall z \in G_1$, где G_1 — круг, ограниченный окружностью γ_1 . Получим оценку для $u^{(n)}(z)$:

$$|u^{(n)}(z)| \leq \frac{n!RM}{(R - \rho)^{n+1}};$$

здесь $M = \max_{z \in G_2} |u(z)|$, где G_2 — круг, ограниченный окружностью γ_2 .

Наконец, имеет место неравенство

$$\left| \frac{\ln^n w}{n!} u^{(n)}(z) \right| \leq \frac{RM}{(R - \rho)^{n+1}} |\ln w|^n, \quad \forall z \in G_1,$$

которое и гарантирует сходимость ряда (2.4) в некоторой окрестности точки $(0, 1) \in \mathbb{C}_{zw}$.

Далее, покажем непосредственно выполнимость коммутационного соотношения (2.2). Поскольку $(Az)(z, w) = z + \ln w$, то для этого достаточно доказать, что $(Au)(z, w) = u(z + \ln w)$. Разложим $u(z + \ln w)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z (по степеням $\ln w$):

$$\begin{aligned} u(z + \ln w) &= u(z + \ln w) \Big|_{w=1} + \frac{u'(z + \ln w)}{1!} \Big|_{w=1} \ln w + \dots + \\ &+ \frac{u^{(n)}(z + \ln w)}{n!} \Big|_{w=1} \ln^n w + \dots = u(z) + \frac{u'(z)}{1!} \ln w + \dots + \frac{u^{(n)}(z)}{n!} \ln^n w + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, $(Au)(z, w) = u((Az)(z, w))$ и утверждение доказано.

Общее замечание к § 2.1. Оператор $A : \mathcal{A}_{z_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0}$ является обратимым. Действительно, если $(Au)(z, w) = 0$, то, как следует из коммутационного соотношения (2.2), $u((Az)(z, w)) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_{zw}$, т.е. функция $u(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}_z$, а, значит, $\text{Ker } A = \{0\}$. Вместе с теоремой Банаха об обратном операторе это означает непрерывную обратимость оператора A , поскольку $\text{Im } A$ образует подпространство в $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$.

§ 2.2. Структура гомоморфизмов алгебр голоморфных функций

Приведенный в конце § 2.1 пример гомоморфизма алгебр голоморфных функций различного числа переменных является простейшим и явно не отражает связь с теорией дифференциальных уравнений. Благодаря этому, удалось доказать коммутационное соотношение непосредственно. Сформулируем и докажем теорему об общем виде гомоморфизма алгебр голоморфных функций.

Теорема 2.3. *Отображение $A_f : \mathcal{A}_{z_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0}$, заданное формулой*

$$\begin{aligned} (A_f u)(z, w) &= u(z) - \int_{w_0}^w \frac{u'(z) dw_1}{f(z, w_1)} + \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \frac{u'(z) dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} - \\ &- \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_2} \frac{u'(z) dw_3}{f(z, w_3)} \right) \frac{dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} + \dots, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $f(z, w) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0}$, $f(z, w) \neq 0$ в некоторой окрестности $\Omega_{z_0 w_0}$ точки (z_0, w_0) , а путь интегрирования — произвольный гладкий, целиком лежащий в $\Omega_{z_0 w_0}$, является непрерывным гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$.

Замечание. Ряд (2.4) получается из ряда (2.5), если положить $f(z, w) \equiv w$, $z_0 = 0$ и $w_0 = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для доказательства равномерной сходимости ряда в некоторой замкнутой окрестности $\overline{\Omega'}_{z_0 w_0} \subset \Omega_{z_0 w_0}$ точки (z_0, w_0) применяем метод, основанный на использовании интегральной формулы Коши, так же как мы это делали в гл. I. Обозначим через $\overline{D}_{z_0 w_0} = \overline{\omega}_{z_0}^R \times \overline{G}_{w_0}^d$, где $\overline{\omega}_{z_0}^R = \{z : |z - z_0| \leq R\}$, $\overline{G}_{w_0}^d = \{w : |w - w_0| \leq d\}$, причем $\overline{D}_{z_0 w_0} \subset \Omega_{z_0 w_0}$. Пусть теперь $\overline{\tau}_{z_0}^\rho = \{z : |z - z_0| \leq \rho\}$, где $0 < \rho < R$. Построим n концентрических окружностей

$$C_k = \{z : |z - z_0| = r_k\}$$

с радиусами

$$r_k = \rho + \frac{k}{n}(R - \rho), \quad k = \overline{1, n},$$

находящимися на одинаковом расстоянии друг от друга. Имеем, в соответствии с интегральной формулой Коши, для любого фиксированного $z \in \overline{\tau}_{z_0}^\rho$:

$$\begin{aligned} U_n(z, w) &= \underbrace{\int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_{n-1}} \frac{u'(z) dw_n}{f(z, w_n)} \right) \frac{dw_{n-1}}{f(z, w_{n-1})} \right) \cdots \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)}}_{n \text{ интегралов}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{w_0}^w \frac{dw_1}{f(z, w_1)} \oint_{C_1} \frac{dz_1}{(z - z_1)^2} \int_{w_0}^{w_1} \frac{dw_2}{f(z_1, w_2)} \oint_{C_2} \frac{dz_2}{(z_1 - z_2)^2} \cdot \\ &\quad \cdot \int_{w_0}^{w_2} \frac{dw_3}{f(z_2, w_3)} \cdots \oint_{C_{n-1}} \frac{dz_{n-1}}{(z_{n-2} - z_{n-1})^2} \int_{w_0}^{w_{n-1}} \frac{dw_n}{f(z_{n-1}, w_n)} \oint_{C_n} \frac{u(z_n) dz_n}{(z_{n-1} - z_n)^2}, \end{aligned}$$

где $z_k \in \mathbb{C}$, $\overline{1, n}$.

Тогда,

$$|U_n(z, w)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{w_0}^w dw_1 \int_{w_0}^{w_1} dw_2 \dots \int_{w_0}^{w_{n-1}} dw_n \right| \left(\max_{\overline{D}_{z_0 w_0}} \left| \frac{1}{f(z, w)} \right| \right)^n H_n$$

или

$$|U_n(z, w)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{|w - w_0|^n}{n!} \left(\max_{\overline{D}_{z_0 w_0}} \left| \frac{1}{f(z, w)} \right| \right)^n H_n, \quad (2.7)$$

где

$$H_n = \oint_{|\tilde{z}_1|=r_1} \frac{|dz_1|}{|z - z_1|^2} \oint_{|\tilde{z}_2|=r_2} \frac{|dz_2|}{|z_1 - z_2|^2} \dots \oint_{|\tilde{z}_n|=r_n} \frac{|dz_n|}{|z_{n-1} - z_n|^2};$$

здесь $\tilde{z}_k = z_k - z_0$, $k = \overline{1, n}$.

Легко видеть (см. § 1.4), что

$$\begin{aligned} H_n &= \int_0^{2\pi} \frac{r_1 d\Theta}{r_1^2 + |\tilde{z}|^2 - 2r_1|\tilde{z}| \cos \Theta} \int_0^{2\pi} \frac{r_2 d\Theta}{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos \Theta} \dots \\ &\cdot \int_0^{2\pi} \frac{r_n d\Theta}{r_{n-1}^2 + r_n^2 - 2r_{n-1} r_n \cos \Theta} = \frac{(2\pi)^n r_1 r_2 \dots r_n}{(r_1^2 - |\tilde{z}|^2)(r_2^2 - r_1^2) \dots (r_n^2 - r_{n-1}^2)} \leq \\ &\leq \frac{(2\pi)^n R^n n^n}{2^{n-1} \rho^n (R - \rho)^n}, \end{aligned}$$

здесь $|\tilde{z}| = |z - z_0|$.

Отсюда следует, что

$$|U_n(z, w)| \leq M \mathcal{K}^n |w - w_0|^n \quad (2.8)$$

для некоторых $M > 0$, $\mathcal{K} > 0$ и $\forall (z, w) \in \overline{\tau}_{z_0}^\rho \times \overline{G}_{w_0}^d$. Если выбрать $d < \frac{1}{\mathcal{K}}$, то ряд (2.5) будет сходиться равномерно на указанном множестве к функции $U(z, w)$, голоморфной по обоим переменным в некоторой окрестности точки $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_{zw}$ (теорема Гартогса [94]).

Далее непосредственной подстановкой проверяется, что $U(z, w) = (Afu)(z, w)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial z} + f(z, w) \frac{\partial U}{\partial w} = 0, \quad (2.9)$$

а значит, является интегралом дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w) \quad (2.10)$$

в некоторой окрестности точки (z_0, w_0) . При этом, общий интеграл

$$(A_f u)(z, w) = u(z_0) \quad (2.11)$$

определяет в некоторой окрестности точки z_0 на комплексной плоскости $\mathbb{C}_z$ (при любой функции $u(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$) решение уравнения (2.10), удовлетворяющего начальному условию $w(z_0) = w_0$.

Наряду с интегралом $(A_f u)(z, w)$ уравнения (1.10) рассмотрим интеграл $(A_f z)(z, w)$. Как следует из общей теории дифференциальных уравнений [1, 28], существует голоморфная функция φ одной переменной такая, что

$$(A_f u)(z, w) = \varphi((A_f z)(z, w)). \quad (2.12)$$

Если положить в равенстве (2.12) $w = w_0$, то ввиду непрерывности функции φ получится, что $u(z) \equiv \varphi(z)$. Таким образом,

$$(A_f u)(z, w) = u((A_f z)(z, w)),$$

т.е. A_f удовлетворяет коммутационному соотношению (2.2) и, следовательно, в соответствии с теоремой 2.1 является непрерывным гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$. Теорема 2.3. доказана.

Следствие. Обозначим через

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{z_0 w_0} = \left\{ U(z, w) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0} : \frac{\partial U(z_0, w_0)}{\partial z} \neq 0, \frac{\partial U(z_0, w_0)}{\partial w} \neq 0 \right\}.$$

Ясно, что всякая функция $U(z, w) \in \widetilde{\mathcal{U}}_{z_0 w_0}$ представляет собой интеграл (в окрестности точки $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_{zw}$) некоторого дифференциального уравнения первого порядка вида (2.10), у которого правая часть отлична от нуля в точке (z_0, w_0) . В итоге, соответствующие таким уравнениям гомоморфизмы разбивают множество $\widetilde{\mathcal{U}}_{z_0 w_0}$ на классы эквивалентности, причем само отношение эквивалентности задается по следующему правилу:

$$U(z, w) \sim V(z, w) \Leftrightarrow \exists \varphi : U = \varphi(V),$$

где φ — голоморфная функция одной переменной. Следовательно,

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{z_0 w_0} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}_{z_0 w_0}} \text{Im } A_f.$$

Здесь через $\mathcal{F}_{z_0 w_0}$ обозначена подалгебра алгебры $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$, состоящая из функций $f(z, w)$ таких, что $f(z_0, w_0) \neq 0$. При этом классы эквивалентности изоморфны между собой. Проиллюстрируем этот изоморфизм диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} & & (A_f u)(z, w) \in \widetilde{\mathcal{U}}_{z_0 w_0} \\ & \nearrow & \updownarrow \\ \mathcal{A}_{z_0} \ni u(z) & & (A_g u)(z, w) \in \widetilde{\mathcal{U}}_{z_0 w_0} \\ & \searrow & \end{array}$$

где $f, g \in \mathcal{F}_{z_0 w_0}$ и являются правыми частями дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной. Кроме того, каждый класс является замкнутой подалгеброй с базисом

$$\{(A_f(z - z_0))(z, w), (A_f(z - z_0)^2)(z, w), \dots, (A_f(z - z_0)^m)(z, w), \dots\}.$$

Общее замечание к § 2.1 и § 2.2. Все предыдущие построения велись в пространствах голоморфных функций и, в принципе, это оправдано, поскольку в формуле (2.5) использовалась бесконечная дифференцируемость входящих в нее функций. Тем не менее, пространство, в котором действует оператор A , можно расширить. А именно, будем считать, что оператор A действует из алгебры C_{z_0} непрерывных в точке $z_0 \in \mathbb{C}_z$ функций комплексной переменной z в алгебру $R_{z_0 w_0}$ функций двух комплексных переменных z и w , непрерывных в точке $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_{zw}$ и имеет область определения $D(A)$, состоящую из многочленов переменной z . Тогда можно доказать (также как и в теореме 2.1), что если $A : C_{z_0} \rightarrow R_{z_0 w_0}$ удовлетворяет коммутационному соотношению

$$(Aq)(z, w) = q((Az)(z, w)) \quad \forall q(z) \in D(A), \quad (2.2')$$

то он является непрерывным гомоморфизмом алгебры C_{z_0} в алгебру $R_{z_0 w_0}$, тем более, что топологии $\mathcal{A}_{z_0}$ и C_{z_0} , $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$ и $R_{z_0 w_0}$ "устроены" одинаково

(эти топологии диктуются равномерной сходимостью на компактах). Далее, поскольку множество многочленов плотно в C_{z_0} , то появляется возможность расширения оператора A (см. [25, 86]). Под расширением оператора A будем понимать оператор $\bar{A}$, определенный на всем C_{z_0} и действующий по формуле:

$$(\bar{A}v)(z, w) = v((Az)(z, w)) \quad \forall v(z) \in C_{z_0}.$$

Заметим, что $\bar{A} : C_{z_0} \rightarrow R_{z_0 w_0}$ также является гомоморфизмом указанных алгебр. Действительно,

$$\begin{aligned} (\bar{A}(v_1 v_2))(z, w) &= (v_1 v_2)((Az)(z, w)) = v_1((Az)(z, w)) v_2((Az)(z, w)) = \\ &= (\bar{A}v_1)(z, w) (\bar{A}v_2)(z, w) \end{aligned}$$

и утверждение доказано.

Непрерывность $\bar{A}$ доказывается так же как и в голоморфном случае в связи, как было сказано ранее, со сходностью топологий.

§ 2.3. Гомоморфизмы в теории дифференциальных уравнений

Из доказательства теоремы 2.3 следует, что каждому дифференциальному уравнению

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w) \tag{2.14}$$

в случае, если $f(z, w) \in \mathcal{F}_{z_0 w_0}$ соответствует гомоморфизм A_f алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$. Более того, $\text{Im } A_f$ содержит все интегралы уравнения (2.14), голоморфные в точке (z_0, w_0) . В самом деле, пусть $U(z, w) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0}$ — интеграл этого уравнения. Но тогда существует функция φ одной переменной такая, что $U(z, w) = \varphi((A_f z)(z, w))$. Положив в этом равенстве $w = w_0$, получим равенство $\varphi(z) = U(z, w_0)$, откуда, по теореме Гартогса, следует голоморфность $\varphi(z)$ в точке $z_0 \in \mathbb{C}_z$ и поэтому $\varphi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$. С другой стороны, в связи с коммутационным соотношением (2.2), $u(z, w) = (A_f \varphi)(z, w)$, т.е. $U(z, w) \in \text{Im } A_f$.

Докажем теперь, что каждому коммутационному соотношению (2.2), а значит, гомоморфизму $A : \mathcal{A}_{z_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0}$, соответствует некоторое дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, с правой частью $f(z, w) \in \mathcal{F}_{z_0 w_0}$, если только выполнены следующие условия для $U_0(z, w) = (Az)(z, w)$ и $U(z, w) = (Au)(z, w)$, как функций двух переменных:

$$\frac{\partial U_0(z_0, w_0)}{\partial z} \neq 0, \quad \frac{\partial U_0(z, w_0)}{\partial w} \neq 0, \quad U(z, w_0) = u(z). \quad (2.15)$$

Перепишем коммутационное соотношение в виде

$$U(z, w) = u(U_0(z, w)) \quad (2.16)$$

и продифференцируем это равенство по z и w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= u'(U_0) \frac{\partial U_0}{\partial z}, \\ \frac{\partial U}{\partial w} &= u'(U_0) \frac{\partial U_0}{\partial w}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

и пусть

$$f(z, w) = -\frac{\frac{\partial U_0}{\partial z}}{\frac{\partial U_0}{\partial w}}. \quad (2.18)$$

Ясно, что $f(z, w) \in \mathcal{F}_{z_0 w_0}$ и из (2.17) вместе с (2.18) следует, что

$$\frac{\partial U}{\partial z} + f(z, w) \frac{\partial U}{\partial w} = 0 \quad (2.19)$$

— уравнение интегралов дифференциального уравнения (2.14) с правой частью (2.18) (в окрестности точки $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_{zw}$). Из теоремы 2.3 следует, что функция $(A_f u)(z, w)$, заданная формулой (2.5) при произвольной функции $u(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$, является интегралом уравнения (2.14). Докажем теперь, что $A \equiv A_f$. Действительно, $(Au)(z, w)$ и $(A_f z)(z, w)$ — интегралы уравнения (2.14) с правой частью (2.18), значит, существует голоморфная функция φ одной переменной такая, что $(Au)(z, w) = \varphi((A_f z)(z, w))$. Положим в этом равенстве функций двух переменных $w = w_0$, тогда $(Au)(z, w_0) = \varphi(z)$. Но $(Au)(z, w_0) = u(z)$ по условию (2.15), следовательно, $\varphi(z) \equiv u(z)$ в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}_z$. Итак,

$(Au)(z, w) = u((A_f z)(z, w))$, а поскольку $u((A_f z)(z, w)) = (A_f u)(z, w)$, то $(Au)(z, w) = (A_f u)(z, w) \quad \forall u(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$. Отсюда и следует, что $A \equiv A_f$. Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.4. *Для того, чтобы отображение $A : \mathcal{A}_{z_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0}$, удовлетворяющее условиям (2.15), было непрерывным гомоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы его образ $\text{Im } A$ состоял из всех голоморфных в точке $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_{zw}$ интегралов некоторого дифференциального уравнения (2.14) с правой частью $f(z, w) \in \mathcal{F}_{z_0 w_0}$, и оно задавалось с помощью формулы (2.5).*

Замечание. Как следует из приведенных выше рассуждений, формула (2.5) дает способ построения интегралов дифференциальных уравнений в комплексной области в виде сходящихся рядов, частичные суммы которых аппроксимируют их с любой наперед заданной степенью точности.

Приведем примеры построения интегралов сильно нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= z^2 + w^2, \\ w(1) &= 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

и построим для заданного уравнения в окрестности точки $(1, 0) \in \mathbb{C}_{zw}$ интеграл:

$$\begin{aligned} U(z, w) &= (Az^2)(z, w) = z^2 - \int_0^w \frac{2zdw_1}{z^2 + w_1^2} + \int_0^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{w_1} \frac{2zdw_2}{z^2 + w_2^2} \right) \frac{dw_1}{z^2 + w_1^2} - \dots = \\ &= z^2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{w}{z} - \frac{w^2}{z^2} (z^2 + w^2) - \dots \end{aligned}$$

Из общего интеграла $U(z, w) = 1$ с помощью теоремы о неявной функции можно определить решение в виде ряда:

$$w(z) = z \operatorname{tg} \frac{z^2 - 1}{2} - \frac{z}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{z^2 - 1}{2} + \dots,$$

сумма первых двух слагаемых которого удовлетворяет задаче (2.20) с точностью до $\bar{o}(|z - 1|)$ при $z \rightarrow 1$.

Пример 2.2. Построим интеграл уравнения

$$\frac{dw}{dz} = e^{zw} \quad (2.21)$$

в окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}_{zw}$.

Имеем,

$$\begin{aligned} U(z, w) = (Az)(z, w) &= z - \int_0^w e^{-zw_1} dw_1 + \int_0^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{w_1} e^{-zw_2} dw_2 \right) e^{-zw_1} dw_1 - \\ &- \int_0^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{w_2} e^{-zw_3} dw_3 \right) e^{-zw_2} dw_2 \right) e^{-zw_1} dw_1 + \dots = \\ &= z - \int_0^w e^{-zw_1} dw_1 - \int_0^w e^{-zw_1} dw_1 \int_0^{w_1} w_2 e^{-zw_2} dw_2 - \\ &- \int_0^w e^{-zw_1} dw_1 \int_0^{w_1} e^{-zw_2} dw_2 \int_0^{w_2} w_3 (w_2 + w_1) e^{-zw_3} dw_3 - \dots - \\ &- \int_0^w e^{-zw_1} dw_1 \int_0^{w_1} e^{-zw_2} dw_2 \dots \int_0^{w_{n-1}} w_n (w_n + w_{n-1}) \dots (w_n + w_{n-1} + \dots + w_1) e^{-zw_n} dw_n - \dots \end{aligned}$$

Обозначим через

$$W_n = \int_0^w e^{-zw_1} dw_1 \int_0^{w_1} e^{-zw_2} dw_2 \dots \int_0^{w_{n-1}} w_n (w_n + w_{n-1}) \dots (w_n + w_{n-1} + \dots + w_1) e^{-zw_n} dw_n$$

$(n+1)$ -й член ряда (2.22). Тогда, предполагая входящие в него переменные вещественными неотрицательными и учитывая, что в этом случае $0 \leq w_n \leq w_{n-1} \leq \dots \leq w_1 \leq w$, получим оценку для W_n :

$$0 < W_n \leq \frac{w^{2n+1} e^{-nzw}}{2^n (n+1)}. \quad (2.23)$$

Оценка (2.23) гарантирует равномерную сходимость ряда (2.22) на любой полуполосе

$$\Pi = \{(z, w) : z \geq 0, 0 \leq w \leq \sqrt{2} - \sigma\},$$

где $0 < \sigma < \sqrt{2}$.

Замечание. Пусть $f(z_0, w_0) = 0$. Введем новую неизвестную функцию $v = w + z$ и подставим в уравнение (2.14):

$$\frac{dv}{dz} = f(z, v - z) + 1, \quad (2.24)$$

$$v(z_0) = w_0 + z_0 = v_0. \quad (2.25)$$

Правая часть этого уравнения $g(z, v) = f(z, v - z) + 1$ такова, что

$$g(z_0, w_0) = f(z_0, w_0) + 1 \neq 0.$$

Будем предполагать, что $g(z, v)$ голоморфна в некоторой окрестности точки (z_0, v_0) . Тогда все выше сказанное верно для уравнения

$$\frac{dv}{dz} = g(z, v)$$

с начальным условием

$$v(z_0) = v_0.$$

Вернемся к примеру 2.1:

$$\frac{dw}{dz} = z^2 + w^2, \quad w(0) = 0. \quad (2.26)$$

Имеем, $v = w + z$ и

$$\frac{dv}{dz} = z^2 + (v - z)^2 + 1, \quad v(0) = 0. \quad (2.27)$$

Построим интеграл уравнения (2.27) с $u(z) = z$:

$$\begin{aligned} U(z, v) &= z - \int_0^v \frac{dv_1}{(v_1 - z)^2 + z^2 + 1} + \\ &+ \int_0^v \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{v_1} \frac{dv_2}{(v_2 - z)^2 + z^2 + 1} \right) \frac{dv_1}{(v_1 - z)^2 + z^2 + 1} - \dots = \\ &= z - \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}} \operatorname{arctg} \frac{v - z}{\sqrt{z^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \right) + \dots \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь теоремой о неявной функции, можно найти "нулевое" приближение к точному решению:

$$v_0(z) = \frac{(z^2 + 1) \operatorname{tg}(z\sqrt{z^2 + 1}) + z\sqrt{z^2 + 1}}{\sqrt{z^2 + 1} - z \operatorname{tg}(z\sqrt{z^2 + 1})}.$$

Таким образом, функция $w(z) = v_0(z) + z$ является приближенным решением задачи Коши (2.26).

Замечание. Формула (2.5), представляющая гомоморфизм A_f , была получена в предположении голоморфности $f(z, w)$. Снизим требования на гладкость функции f . Пусть в вещественной области задано уравнение $y' = f(x, y)$, правая часть которого непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Обозначим через $\mathcal{A}_{x_0}$ алгебру вещественно-голоморфных в точке x_0 функций, т.е. функций, представимых в виде сходящихся рядов по степеням $(x - x_0)$, а через $R'_{x_0 y_0}$ — алгебру функций двух вещественных переменных x и y , непрерывно дифференцируемых в окрестности точки (x_0, y_0) . В этих условиях задать явно оператор A_f не удастся и, тем не менее, можно доказать существование гомоморфизма $A_f: \mathcal{A}_{x_0} \rightarrow R'_{x_0 y_0}$, образ которого состоит из интегралов рассматриваемого дифференциального уравнения. Зададим оператор A_f по формуле:

$$\begin{aligned} (A_f u)(x, y) &= (A_f(c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots))(x, y) \equiv \\ &\equiv c_0 + c_1 U_0 + \dots + c_n U_0^n + \dots \equiv u(U_0), \end{aligned}$$

где $U_0(x, y)$ — какой-нибудь интеграл данного уравнения. Линейность A_f очевидна. Кроме того, из этого равенства следует, что $A_f(x - x_0)(x, y) = U_0(x, y)$, значит $(A_f u)(x, y) = u((A_f(x - x_0))(x, y))$, а это, в свою очередь, означает, что A_f — гомоморфизм. То, что $\operatorname{Im} A_f$ состоит из интегралов уравнения $y' = f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) , следует из общей теории дифференциальных уравнений.

Что же касается построения приближенных интегралов дифференциальных уравнений рассматриваемого типа, то ввиду теоремы о непрерывной зависимости от правой части и возможности аппроксимации ее голоморфными функциями, можно построить интеграл с любой наперед заданной степенью точности.

§ 2.4. Голоморфные по параметру интегралы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений первого порядка и теорема Пуанкаре о разложении

Известная теорема Пуанкаре о разложении [1, 101] гарантирует существование и единственность голоморфного в точке $\varepsilon = 0$ решения $w(z, \varepsilon)$ задачи Коши

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} &= f(z, w, \varepsilon), \\ w(z_0, \varepsilon) &= w_0,\end{aligned}\tag{2.28}$$

если только $f(z, w, \varepsilon)$ голоморфна в точке $(z_0, w_0, 0)$ как функция трех комплексных переменных. Ясно, что в случае сингулярно возмущенной задачи

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dw}{dz} &= f(z, w), \\ w(z_0, \varepsilon) &= w_0,\end{aligned}\tag{2.29}$$

такого быть не может, поскольку при $\varepsilon = 0$ теоремы существования не имеют места. Следующая теорема показывает, что вместо решений голоморфную (даже целую) зависимость от ε левой части уравнения (2.29) наследуют интегралы этого уравнения.

Теорема 2.5. *Если $f(z, w) \in \mathcal{F}_{z_0 w_0}$ (т.е. $f(z, w) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0}$ и $f(z_0, w_0) \neq 0$), то отображения $A_f^\varepsilon: \mathcal{A}_{z_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0}$, заданные при каждом ε из некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ формулой*

$$\begin{aligned}(A_f^\varepsilon u)(z, w) &= u(z) - \varepsilon \int_{w_0}^w \frac{u'(z) dw_1}{f(z, w_1)} + \varepsilon^2 \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \frac{u'(z) dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} - \\ &- \varepsilon^3 \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_2} \frac{u'(z) dw_3}{f(z, w_3)} \right) \frac{dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} + \dots\end{aligned}\tag{2.30}$$

представляют собой голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ семейство непрерывных гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$, удовлетворяющих коммутационному соотношению

$$(A_f^\varepsilon u)(z, w) = u((A_f^\varepsilon z)(z, w)).\tag{2.31}$$

При этом образ $\text{Im } A_f^\varepsilon$ состоит из интегралов уравнения (2.29) в некоторой окрестности точки $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_{zw}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Доказательство теоремы фактически повторяет доказательство теоремы 2.3, причем, как будет видно далее, наличие малого комплексного параметра ε приведет к глобальному характеру теоремы.

Составим уравнение интегралов в окрестности точки (z_0, w_0) дифференциального уравнения (2.29):

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} + f(z, w) \frac{\partial U}{\partial w} = 0, \quad (2.32)$$

и будем искать его решение в виде ряда по степеням ε :

$$U(z, w, \varepsilon) = U_0(z, w) + \varepsilon U_1(z, w) + \dots + \varepsilon^n U_n(z, w) + \dots \quad (2.33)$$

Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, получим серию задач:

$$f(z, w) \frac{\partial U}{\partial w} = 0, \quad (2.34_0)$$

$$f(z, w) \frac{\partial U_1}{\partial w} = -\frac{\partial U_0}{\partial z}, \quad (2.34_1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f(z, w) \frac{\partial U_n}{\partial w} = -\frac{\partial U_{n-1}}{\partial z}, \quad (2.34_n)$$

$\dots \dots \dots$

В качестве решения $U_0(z, w)$ уравнения (2.34₀) можно взять произвольную функцию $u(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$. Тогда:

$$U_1(z, w) = - \int_{w_0}^w \frac{u'(z) dw_1}{f(z, w_1)};$$

$$U_2(z, w) = \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \frac{u'(z) dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)};$$

$\dots \dots \dots$

$$U_n(z, w) = \underbrace{\int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_{n-1}} \frac{u'(z) dw_n}{f(z, w_n)} \right) \frac{dw_{n-1}}{f(z, w_{n-1})} \right) \cdots \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)}}_{n \text{ интегралов}}; \quad (2.35)$$

— решения уравнений $(2.34_1), (2.34_2), \dots, (2.34_n), \dots$. Оценка для $U_n(z, w)$ уже получена в § 2.2 и поэтому ряд (2.33) по степеням ε будет сходиться равномерно на каждом компакте из $\Omega_{z_0 w_0}$ в некоторой достаточно малой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (зависящей от компакта), что подчеркивает глобальный характер утверждения о существовании голоморфных по малому параметру ε интегралов уравнения (2.29) и является принципиальным отличием от теоремы существования и единственности решения, которая носит локальный характер.

То, что A_f^ε — гомоморфизмы алгебр $\mathcal{A}_{z_0}$ и $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$, а также коммутационное соотношение (2.31), доказывается аналогично тому, как это делалось в теореме 2.3.

Итак, уравнение (2.29) обладает интегралами $U(z, w, \varepsilon) = (A_f^\varepsilon u)(z, w)$, голоморфными в точке $\varepsilon = 0$, и, в этом смысле, теорема Пуанкаре о разложении получает обобщение.

Замечание. Рассмотрим более общий случай сингулярно возмущенной задачи Коши, когда уравнение содержит два параметра — один входит в уравнение сингулярным образом, т.е. стоит перед производной, а второй — регулярным образом, т.е. входит в правую часть:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dw}{dz} &= f(z, w, \mu), \\ w(z_0, \varepsilon, \mu) &= w_0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Относительно правой части этого уравнения будем предполагать, что она голоморфна по трем переменным в точке $(z_0, w_0, 0)$ и $f(z_0, w_0, 0) \neq 0$. Также как и в случае уравнения (2.29) составим уравнение интегралов

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} + f(z, w, \mu) \frac{\partial U}{\partial w} = 0,$$

и, считая оператор $\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}$ подчиненным оператору $f(z, w, \mu) \frac{\partial}{\partial w}$, определим

его решение в виде ряда по степеням ε :

$$\begin{aligned}
U(z, w, \varepsilon, \mu) = & u(z) - \varepsilon \int_{w_0}^w \frac{u'(z)dw_1}{f(z, w_1, \mu)} + \varepsilon^2 \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \frac{u'(z)dw_2}{f(z, w_2, \mu)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1, \mu)} - \\
& - \varepsilon^3 \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_2} \frac{u'(z)dw_3}{f(z, w_3, \mu)} \right) \frac{dw_2}{f(z, w_2, \mu)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1, \mu)} + \dots
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Очевидно, что сумма ряда (2.37), равная $U(z, w, \varepsilon, \mu)$, является функцией, голоморфной в точке $(z_0, w_0, 0, 0)$. По теореме Гартогса, функция $U(z, w, \varepsilon, \varepsilon)$ (где положили $\mu = \varepsilon$) также является голоморфной в точке $\varepsilon = 0$ равномерно по (z, w) на любом компакте, принадлежащем области $\Omega_{z_0 w_0}$, в которой правая часть уравнения (2.36) отлична от нуля.

Вернемся к уравнению (2.29).

Определение 2.1. Коэффициент $U_1(z, w)$ степенного ряда (2.33) называется *главным членом* интеграла $U(z, w, \varepsilon)$ уравнения (2.29).

Лемма о суперпозиции. Пусть помимо уравнения (2.29) заданы еще m уравнений

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} = f_k(z, w), \quad k = \overline{1, m} \tag{2.38}$$

с тем же начальным условием $w(z_0, \varepsilon) = w_0$ и правыми частями $f_k(z, w) \in \mathcal{F}_{z_0 w_0}$. Тогда, если в некоторой окрестности точки $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_{zw}$ выполняется равенство

$$\frac{1}{f(z, w)} = \frac{1}{f_1(z, w)} + \dots + \frac{1}{f_m(z, w)},$$

то

$$U_1(z, w) = U_{1(1)}(z, w) + \dots + U_{1(m)}(z, w),$$

где $U_{1(k)}(z, w)$, $\overline{1, m}$ — главные члены интегралов рассматриваемых m уравнений (2.38).

Доказательство леммы очевидно. В дальнейшем мы увидим, какую роль играет главный член интеграла $U(z, w, \varepsilon)$ — он будет определяющим при построении так называемых псевдоголоморфных решений сингулярно возмущенных задач.

Замечание. Верно утверждение, обратное теореме 2.5: всякому голоморфному в точке $\varepsilon = 0$ семейству $\{A^\varepsilon\}$ гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$, при выполнении условий (2.15), соответствует сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение первого порядка (в общем случае, вида (2.36) при $\mu = \varepsilon$), такое, что $\text{Im } A^\varepsilon$ состоит из интегралов этого уравнения. Имеем,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}[(A^\varepsilon u)(z, w)] &= u'((A^\varepsilon z)(z, w)) \frac{\partial}{\partial z}[(A^\varepsilon z)(z, w)]; \\ \frac{\partial}{\partial w}[(A^\varepsilon z)(z, w)] &= u'((A^\varepsilon z)(z, w)) \frac{\partial}{\partial w}[(A^\varepsilon z)(z, w)].\end{aligned}$$

Пусть функции $f(z, w, \varepsilon)$ удовлетворяет равенству

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}[(A^\varepsilon z)(z, w)] + f(z, w, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial w}[(A^\varepsilon z)(z, w)] = 0.$$

Ясно, что при сделанных предположениях такая функция существует и является голоморфной в точке $(z_0, w_0, 0)$, причем $f(z_0, w_0, 0) \neq 0$. Из приведенных трех равенств следует, что

$$\varepsilon \frac{\partial U(z, w, \varepsilon)}{\partial z} + f(z, w, \varepsilon) \frac{\partial U(z, w, \varepsilon)}{\partial w} = 0,$$

где $U(z, w, \varepsilon) = (A^\varepsilon u)(z, w)$, а значит, $U(z, w, \varepsilon)$ — интеграл дифференциального уравнения

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} = f(z, w, \varepsilon)$$

в окрестности точки $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_{zw}$.

§ 2.5. Псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений первого порядка и метод голоморфной регуляризации

Как было сказано в гл. I, одним из основных вопросов, решаемых в рамках метода регуляризации С.А. Ломова [41, 48], является вопрос об обычной сходимости асимптотических рядов по степеням ε для решений сингулярно возмущенных задач. Эта проблема полностью решена в случае линейных сингулярно возмущенных уравнений вида

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = B(x)y + h(x), \quad (2.39)$$

с начальным условием $y(x_0, \varepsilon) = y_0$, когда линейный оператор $B(x)$ при каждом $x \in [x_0, X]$ действует в банаховом пространстве E и является там ограниченным либо неограниченным замкнутым. При этом использовалась теория пространств векторов экспоненциального типа [66, 105] (см. также гл. I). Ряды, представляющие решения сингулярно возмущенных задач (2.39) и сходящиеся в обычном смысле в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, были названы псевдоаналитическими решениями [111]. Однако, вскоре стало понятно, что одной обычной сходимостью псевдоаналитичность не ограничивается и требуется расширение этого понятия. Особенно актуальным этот вопрос стал при исследовании нелинейных задач.

Введем понятие псевдоголоморфного решения сингулярно возмущенной задачи.

Определение 2.2. Решение $w(z, \varepsilon)$ задачи Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dw}{dz} &= f(z, w), \\ w(z_0, \varepsilon) &= w_0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

называется *псевдоголоморфным* в точке $\varepsilon = 0$, если существует функция $W(z, \eta, \varepsilon)$, голоморфная в точке $(z_0, 0, 0)$, такая, что для любого ε из некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ существует окрестность $\omega_{z_0}^\varepsilon$ точки z_0 на комплексной плоскости $\mathbb{C}_z$, в которой выполняется равенство

$$w(z, \varepsilon) = W\left(z, \frac{\varphi(z)}{\varepsilon}, \varepsilon\right), \quad (2.41)$$

в котором функция $\varphi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$, $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) \neq 0$.

Если, при этом, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(z, \eta) \varepsilon^n, \quad (2.42)$$

представляющий функцию $W(z, \eta, \varepsilon)$, сходится равномерно на некотором компакте $T_{z_0} \subset \mathbb{C}_z$, содержащем точку z_0 для каждого η из некоторого неограниченного связного множества $G \subset \mathbb{C}_\eta$ при $|\varepsilon| < \delta$, где $\delta > 0$ и зависит от η , то решение $w(z, \varepsilon)$ называется *псевдоголоморфным в глобальном смысле*.

Вначале докажем теорему о существовании псевдоголоморфного решения.

Теорема 2.6. *Если $f(z, w) \in \mathcal{F}_{z_0 w_0}$, то решение $w(z, \varepsilon)$ задачи (2.40) является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$, $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) \neq 0$. Из теоремы 2.5 следует, что при любом ε из некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, функция

$$\begin{aligned} U(z, w, \varepsilon) = (A_f^\varepsilon \varphi)(z, w) = & \varphi(z) - \varepsilon \int_{w_0}^w \frac{\varphi'(z) dw_1}{f(z, w_1)} + \\ & + \varepsilon^2 \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \frac{\varphi'(z) dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} - \\ & - \varepsilon^3 \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_2} \frac{\varphi'(z) dw_3}{f(z, w_3)} \right) \frac{dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} + \dots \end{aligned} \quad (2.43)$$

является интегралом в окрестности точки (z_0, w_0) уравнения (2.40) (с данным ε) и как функция трех комплексных переменных голоморфна в точке $(z_0, w_0, 0)$. Из равенства (2.43) видно, что $U(z_0, w_0, \varepsilon) = 0$, поэтому для определения решения $w(z, \varepsilon)$ рассмотрим общий интеграл

$$U(z, w, \varepsilon) = 0, \quad (2.44)$$

который представим в виде:

$$\begin{aligned} & \varphi'(z) \int_{w_0}^w \frac{dw_1}{f(z, w_1)} - \varepsilon \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \frac{\varphi'(z) dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} + \\ & + \varepsilon^2 \int_{w_0}^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{w_0}^{w_2} \frac{\varphi'(z) dw_3}{f(z, w_3)} \right) \frac{dw_2}{f(z, w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z, w_1)} - \dots = \frac{\varphi(z)}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Обозначим левую часть равенства (2.45) через $V(z, w, \varepsilon)$, а правую часть — через η :

$$V(z, w, \varepsilon) = \eta. \quad (2.46)$$

Очевидно, что $V(z, w, \varepsilon)$ голоморфна в точке $(z_0, w_0, 0)$, $V(z_0, w_0, 0) = 0$ и $\frac{\partial V(z_0, w_0, 0)}{\partial w} \neq 0$, а значит, уравнение (2.46) определяет неявным образом единственную функцию $w = w(z, \eta, \varepsilon)$, голоморфную в точке $(z_0, 0, 0)$, являющуюся при $\eta = \frac{\varphi(z)}{\varepsilon}$ решением задачи Коши (2.40) при каждом фиксированном ε в некоторой достаточно малой окрестности точки z_0 , зависящей от ε , так как равенство (2.45) также представляет собой общий интеграл уравнения (2.40). Теорема 2.6 доказана.

Из доказательства теоремы 2.6 следует, что чем меньше ε , тем меньше окрестность $\omega_{z_0}^\varepsilon$ существования псевдоголоморфного решения $w(z, \varepsilon)$, чего явно недостаточно при решении прикладных задач. С другой стороны, в приложениях, как правило, $\varepsilon > 0$ и уравнение задано в вещественной области. Поэтому, при изложении метода голоморфной регуляризации, все переменные будем считать вещественными, а функции вещественнозначными, допускающими голоморфное продолжение на комплексные области. Более того, во избежание путаницы, перейдем от w к переменной y , а от переменной z — к переменной x . В этих условиях задача (2.40) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dx} &= f(x, y), \\ y(x_0, \varepsilon) &= y_0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Сформулируем и докажем теорему о глобальной псевдоголоморфности решения задачи Коши (2.47).

Теорема 2.7. *Если существует функция $\varphi(x)$, голоморфное продолжение $\varphi(z)$ которой принадлежит $\mathcal{A}_{x_0}$ такая, что $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi'(x_0) < 0 \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \Delta]$, где $\Delta > 0$ и уравнение*

$$\varphi'(x) \int_{y_0}^y \frac{dy_1}{f(x, y_1)} = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \quad (2.48)$$

имеет решение $y = Y_0\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)$, равномерно ограниченное при $\varepsilon \rightarrow +0$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$, то решение $y(x, \varepsilon)$ задачи Коши (2.47), определяемое общим интегралом $(A_f^\varepsilon \varphi)(x, y) = 0$, является псевдоголоморфным в глобальном смысле.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Имеем интеграл уравнения (2.47), порожденный функцией $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}
 U(x, y, \varepsilon) = (A_f^\varepsilon \varphi)(x, y) = \varphi(x) - \varepsilon \int_{y_0}^y \frac{\varphi'(x) dy_1}{f(x, y_1)} + \\
 + \varepsilon^2 \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\varphi'(x) dy_2}{f(x, y_2)} \right) \frac{dy_1}{f(x, y_1)} - \\
 - \varepsilon^3 \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_2} \frac{\varphi'(x) dy_3}{f(x, y_3)} \right) \frac{dy_2}{f(x, y_2)} \right) \frac{dy_1}{f(x, y_1)} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Так же как и в теореме 2.6, представим общий интеграл $U(x, y, \varepsilon) = 0$ в виде:

$$\begin{aligned}
 \varphi'(x) \int_{y_0}^y \frac{dy_1}{f(x, y_1)} - \varepsilon \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\varphi'(x) dy_2}{f(x, y_2)} \right) \frac{dy_1}{f(x, y_1)} + \\
 + \varepsilon^2 \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_2} \frac{\varphi'(x) dy_3}{f(x, y_3)} \right) \frac{dy_2}{f(x, y_2)} \right) \frac{dy_1}{f(x, y_1)} - \dots = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Обозначим левую часть равенства (2.50) через $V(x, y, \varepsilon)$. Тогда получим следующее равенство:

$$\varphi'(x) \int_{y_0}^y \frac{dy_1}{f(x, y_1)} + \tilde{V}(x, y, \varepsilon) = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, \tag{2.51}$$

где

$$\tilde{V}(x, y, \varepsilon) = V(x, y, \varepsilon) - \varphi'(x) \int_{y_0}^y \frac{dy_1}{f(x, y_1)}.$$

Пропотенцируем равенство (2.51) по основанию e :

$$\exp \left\{ \varphi'(x) \int_{y_0}^y \frac{dy_1}{f(x, y_1)} \right\} \cdot \exp \tilde{V}(x, y, \varepsilon) = \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}. \tag{2.52}$$

Пусть

$$\exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} = q$$

и

$$\exp \left\{ \varphi'(x) \int_{y_0}^y \frac{dy_1}{f(x, y_1)} \right\} = g(x, y).$$

Очевидно, что $0 < q \leq 1$. Рассмотрим уравнение

$$\Phi(x, q, y, \varepsilon) \equiv g(x, y) \exp \tilde{V}(x, y, \varepsilon) - q = 0. \quad (2.53)$$

Фиксируем $x^* \in [x_0, x_0 + \Delta]$ и $\varepsilon^* > 0$ (достаточно малое). Тогда, как это следует из условия теоремы, существует y^* такое, что

$$g(x^*, y^*) = q^*,$$

где

$$q^* = \exp \frac{\varphi(x^*)}{\varepsilon^*},$$

причем множество всех таких y^* ограничено при $\varepsilon^* \rightarrow +0$. Поскольку $\tilde{V}(x, y, 0) \equiv 0$, то

$$\Phi(x^*, q^*, y^*, 0) = 0. \quad (2.54)$$

А, так как

$$\frac{\partial \Phi(x^*, q^*, y^*, 0)}{\partial y} \neq 0,$$

то по теореме о неявной функции, уравнение (2.54) определяет функцию $y = \tilde{Y}(x, q, \varepsilon)$, голоморфную в некоторой окрестности точки $Q^*(x^*, q^*, 0)$. Из теории функций нескольких комплексных переменных следует [94], что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Y}_n(x, q) \varepsilon^n, \quad (2.55)$$

где

$$\tilde{Y}_0(x, q) \Big|_{q=\exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} = Y_0 \left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right),$$

представляющий функцию $\tilde{Y}(x, q, \varepsilon)$, сходится в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ равномерно на любом компакте из некоторой окрестности

$\sigma_{x^*q^*}$ точки $R^*(x^*, q^*)$. Фиксируем малое q_0 такое, что $0 < q_0 < 1$, покроем прямоугольник

$$\Pi_{xq} = [x_0, x_0 + \Delta] \times [q_0, 1]$$

на плоскости (x, q) окрестностями $\{\sigma_{x^*q^*}\}$ и выберем конечное подпокрытие $\{\sigma_{x^*q^*}\}_1^N$. Тогда можно утверждать, что ряд (2.55) сходится в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (наименьшей из соответствующих подпокрытию) равномерно на Π_{xq} , что и означает глобальную псевдоголоморфность решения $y(x, \varepsilon)$. Теорема 2.7 доказана.

Замечание 1. Если $\varepsilon > 0$ из уравнения (2.47) принадлежит вышеуказанной окрестности точки $\varepsilon = 0$, а кривая $q = \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}$ — прямоугольнику Π_{xq} (см. рис. 2.1), то

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Y}_n \left(x, \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right) \varepsilon^n \quad (2.56)$$

является точным решением задачи (2.47) на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$.

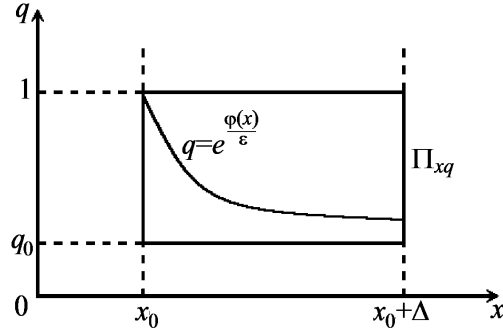


Рис. 2.1

Если же кривая $q = \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}$ не принадлежит целиком прямоугольнику Π_{xq} , то формула (2.56) задает решение $y(x, \varepsilon)$ на отрезке $[x_0, \tilde{x}]$, где $\tilde{x}$ удовлетворяет равенству $\exp \left\{ \frac{\varphi(\tilde{x})}{\varepsilon} \right\} = q_0$ (см. рис. 2.2).

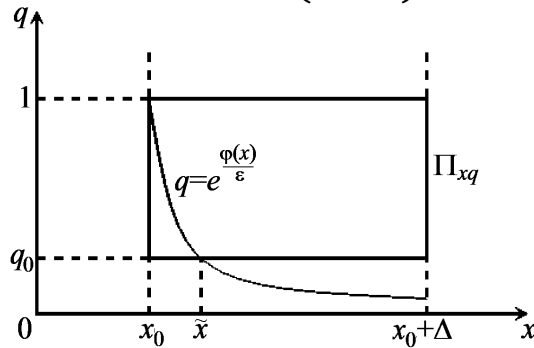


Рис. 2.2

Заметим, что отрезки $[x_0, x_0 + \Delta]$ или $[x_0, \tilde{x}]$ выступают в роли компакта T_{x_0} из определения глобальной псевдоголоморфности. В роли множества G выступает отрицательная полуось $(-\infty, 0]$ на плоскости $\mathbb{C}_\eta$.

Замечание 2. Сформулируем достаточные условия существования равномерно ограниченного при $\varepsilon \rightarrow +0$ решения $y = Y_0 \left(x, \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right)$ уравнения (2.48). Для этого представим его следующим образом:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy_1}{f(x, y_1)} = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon \varphi'(x)}. \quad (2.48')$$

Из условия теоремы следует, что правая часть уравнения (2.48') строго положительна на полуинтервале $[x_0, x_0 + \Delta]$. Если обозначить ее через s , то при каждом фиксированном $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$ она будет изменяться от некоторого положительного значения до бесконечности, а, в итоге, если $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$, то $0 \leq s < +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Поэтому, вопрос о равномерной ограниченности $Y_0 \left(x, \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right)$ напрямую связан с вопросом о существовании положительно устойчивых по Лагранжу решений уравнения

$$\frac{dy}{ds} = f(x, y), \quad (2.57)$$

в котором $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$ выступает в роли параметра. Напомним, что решение $y(x, s)$ (при фиксированном $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$) называется положительно устойчивым по Лагранжу, если оно ограничено при $s \rightarrow +\infty$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.7'. *Если уравнение (2.57) положительно устойчиво по Лагранжу равномерно на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$, то задача Коши (2.47) имеет псевдоголоморфное в глобальном смысле решение $y(x, \varepsilon)$.*

Если же в определении глобальной псевдоголоморфности потребовать ограниченности W_0 на множестве G или, в вещественном случае, ограниченности Y_0 , то условие положительной устойчивости по Лагранжу становится также и необходимым. Далее, поскольку устойчивость по Лагранжу вытекает из устойчивости по Ляпунову, а последняя дает достаточные условия теоремы А.Н. Тихонова о предельном переходе [76], то

предельный переход, как мы увидим сейчас, будет автоматически вытекать из глобальной псевдоголоморфности. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Определение 2.3. а) Уравнение

$$f(x, y) = 0, \quad x \in [x_0, x_0 + \Delta], \quad (2.58)$$

полученное из (2.47) при $\varepsilon = 0$, называется *вырожденным* или *предельным*.

б) Решение $y = \alpha(x)$ уравнения (2.58) называется *изолированным*, если в некоторой окрестности $\omega = \{y : |y - \alpha(x)| < \delta, \quad x \in [x_0, x_0 + \Delta]\}$ оно не имеет других корней.

в) Дифференциальное уравнение (2.57) с начальным условием $y(x, s)|_{x=0} = y_0$ ($s \geq 0$), где $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$ рассматривается как параметр, называется *присоединенным*, а уравнение

$$\frac{dy}{ds} = f(x_0, y), \quad y(0) = y_0, \quad s \geq 0 \quad (2.59)$$

— *начальным присоединенным уравнением* [76, 81].

Заметим, что вырожденное уравнение (2.58) может иметь несколько изолированных корней $y = \alpha_j(x)$, $j = \overline{1, r}$. Выбирается так называемый устойчивый корень, к которому должны стягиваться при $s \rightarrow +\infty$ все решения присоединенного уравнения (2.57), близкие в начальный момент $s = 0$ к устойчивому корню.

Теорема Тихонова [81]. Пусть для уравнения (2.47) выполнены условия:

1°. $f(x, y) \in C^1(D)$, $D = \{(x, y) : |y| < H, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta\}$.

2°. Вырожденное уравнение (2.58) имеет изолированный корень $y = \alpha(x)$, определенный на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$.

3°. Точка покоя $y = \alpha(x)$ присоединенного уравнения (2.57) является асимптотически устойчивой по Ляпунову при $s \rightarrow +\infty$ (равномерно по $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$).

4°. Точка y_0 такова, что решение $y(x)$ начального присоединенного уравнения (2.59) существует при всех $s \geq 0$ и $y(s) \rightarrow \alpha(x_0)$ при $s \rightarrow +\infty$.

Тогда, при достаточно малых $\varepsilon > 0$, уравнение (2.47) имеет единственное решение $y(x, \varepsilon)$, определенное на отрезке $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$, и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = \alpha(x) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \Delta]. \quad (2.60)$$

Заметим, что условие 3° теоремы Тихонова будет заведомо выполнено, если

$$\frac{\partial f(x, \alpha(x))}{\partial y} < 0 \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \Delta].$$

Из всего выше сказанного следует, что если в теореме 2.7' заменить устойчивость по Лагранжу на асимптотическую устойчивость по Ляпунову, то вместе с глобальной псевдоголоморфностью мы будем наблюдать и предельный при $\varepsilon \rightarrow +0$ переход (см. пример 2.3).

Вернемся к ряду (2.56) и, пользуясь теоремой о неявной функции, выпишем формулы его начальных членов:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_1 &= - \frac{V'_\varepsilon}{V'_y} \Big|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=\tilde{Y}_0\left(x, \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)}}; \\ \tilde{Y}_2 &= - \frac{V''_{\varepsilon\varepsilon}(V'_y)^2 - 2V_{\varepsilon y}V'_\varepsilon V'_y + V''_{yy}(V'_\varepsilon)^2}{2(V'_y)^3} \Big|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=\tilde{Y}_0\left(x, \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)}} \end{aligned} \quad (2.61)$$

и так далее.

Здесь, для указанных членов ряда, имеем:

$$\begin{aligned} V'_y \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{\varphi'(x)}{f(x, y)}; \\ V'_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} &= - \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy_2}{f(x, y_2)} \right) \frac{dy_1}{f(x, y_1)}; \\ V''_{\varepsilon\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= 2 \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_2} \frac{\varphi'(x) dy_3}{f(x, y_3)} \right) \frac{dy_2}{f(x, y_2)} \right) \frac{dy_1}{f(x, y_1)}; \\ V''_{yy} \Big|_{\varepsilon=0} &= - \frac{\varphi'(x) f'_y(x, y)}{f^2(x, y)}; \\ V''_{\varepsilon y} \Big|_{\varepsilon=0} &= - \frac{1}{f(x, y)} \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y \frac{\varphi'(x) dy_1}{f(x, y_1)}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Изложенный в этом параграфе подход к решению сингулярно возмущенных задач составляет содержание собственно метода голоморфной регуляризации. При этом функция $\varphi(x)$ называется регуляризующей, а сама задача (2.47) — голоморфно регуляризуемой. Ясно, что в связи с коммутационным соотношением для оператора A_f^ε регуляризующих функций много.

Итак, метод голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных задач вытекает из двух методов: метода линеаризации [4] и метода регуляризации С.А. Ломова [40]. Метод линеаризации сводит нелинейную дифференциальную задачу (2.29) к линейной задаче (2.32), которая рассматривается затем с точки зрения метода регуляризации. Алгебраической основой метода голоморфной регуляризации являются коммутационные соотношения и эквивалентные им гомоморфизмы алгебр голоморфных функций различного числа переменных. В итоге, дифференциальная задача сводится к алгебраической и для нахождения ее решений применяется аппарат теории неявных функций.

Подчеркнем еще одну особенность уравнений в вещественной области. Помимо уравнения (2.47) будем рассматривать уравнение

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = h(x, y) \quad (2.63)$$

с тем же начальным условием $y(x_0, \varepsilon) = y_0$ и такими же условиями на правую часть, что и в уравнении (2.47).

Теорема 2.8. *Если в некоторой окрестности $\sigma_{x_0 y_0}$ точки (x_0, y_0) действительной плоскости переменных x и y правые части (2.47) и (2.63) удовлетворяют неравенству $f(x, y) < h(x, y) < 0$, то интегралы этих уравнений удовлетворяют неравенству*

$$(A_f^\varepsilon x)(x, y) > (A_h^\varepsilon x)(x, y) \quad (2.64)$$

для всех достаточно малых положительных ε и всех $x > x_0$, $y < y_0$ из окрестности $\sigma_{x_0 y_0}$. При этом соответствующие им решения удовлетворяют неравенству

$$y_f(x, \varepsilon) < y_h(x, \varepsilon) \quad (2.65)$$

$\forall x \in \sigma_{x_0 y_0} \cap (x_0, +\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $U_f(x, y, \varepsilon) = (A_f^\varepsilon x)(x, y)$ и $U_h(x, y, \varepsilon) = (A_h^\varepsilon x)(x, y)$. Тогда

$$U_f(x, y, \varepsilon) - U_h(x, y, \varepsilon) = \varepsilon \int_{y_0}^y \frac{f(x, y_1) - h(x, y_1)}{f(x, y_1)h(x, y_1)} dy_1 + \bar{\bar{o}}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon) > 0$$

$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \forall (x, y) \in \{x > x_0, y < y_0\} \cap \sigma_{x_0 y_0}$ и неравенство (2.64) доказано.

Далее рассмотрим общие интегралы $U_f(x, y, \varepsilon) = 0$ и $U_h(x, y, \varepsilon) = 0$ уравнений (2.47) и (2.63) соответственно. Имеем, на решениях этих уравнений

$$U_f(x, y_f, \varepsilon) - U_h(x, y_f, \varepsilon) + U_h(x, y_f, \varepsilon) - U_h(x, y_h, \varepsilon) = 0$$

или

$$U_h(x, y_h, \varepsilon) - U_h(x, y_f, \varepsilon) = U_f(x, y_f, \varepsilon) - U_h(x, y_f, \varepsilon).$$

Правая часть этого равенства положительна по предыдущему (см. неравенство (2.64)), а к левой части применим теорему Лагранжа. Тогда получим неравенство

$$\frac{\partial U_h(x, \tilde{y}, \varepsilon)}{\partial y}(y_h - y_f) > 0.$$

Но

$$\frac{\partial U_h(x, \tilde{y}, \varepsilon)}{\partial y} = -\frac{\varepsilon}{h(x, \tilde{y})} + \bar{\bar{o}}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

так как $h(x, \tilde{y}) < 0$ по условию теоремы. Следовательно, $y_f < y_h$, и теорема 2.8 доказана.

Замечание. Результат, полученный в этой теореме, согласуется с результатами метода верхних и нижних решений [95].

Пример 2.3. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dx} &= y^2 - e^{2x}, \\ y(0, \varepsilon) &= 0. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Имеем интеграл этого уравнения в окрестности начальной точки, порожденный регуляризующей функцией $\varphi(x) = 2(1 - e^x)$:

$$U(x, y, \varepsilon) = (A^\varepsilon \varphi)(x, y) = 2(1 - e^x) + \varepsilon \int_0^y \frac{2e^x dy_1}{y_1^2 - e^{2x}} -$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^2 \int_0^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_1} \frac{2e^x dy_2}{y_2^2 - e^{2x}} \right) \frac{dy_1}{y_1^2 - e^{2x}} + \dots = \\
& = 2(1 - e^x) + \varepsilon \ln \frac{e^x - y}{e^x + y} - \varepsilon^2 \frac{y^2}{y^2 - e^{2x}} + \dots
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Наконец, пользуясь формулами (2.61), (2.62), найдем решение задачи (2.66):

$$y(x, \varepsilon) = e^x \operatorname{th} \frac{1 - e^x}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{th}^2 \frac{1 - e^x}{\varepsilon} + \dots$$

Очевидно, что $y(x, \varepsilon)$ является одновременно и ограниченным в некоторой окрестности точки $x = 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ и псевдоголоморфным в глобальном смысле, так как выполнены все условия теоремы 2.7. При этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = -e^x$$

равномерно по x на любом отрезке $[\delta_1, \delta_2]$, где $\delta_2 > \delta_1 > 0$. Здесь уже работает замечание к теореме 2.7.

Замечание. 1. Априори легко оценить решение задачи Коши (2.66), рассматривая два уравнения

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = y^2 - 1,$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = y^2 - e^2$$

с общим начальным условием $y(0, \varepsilon) = 0$.

2. В уравнении (2.67) можно заменить снова x на z , y на w и тогда получится интеграл $U(z, w, \varepsilon)$ уравнения

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} = w^2 - e^{2z}$$

в некоторой окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}_{zw}$.

Пример 2.4. Имеем задачу Коши

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{dw}{dz} &= e^{-we^z} - 10, \\
w(0, \varepsilon) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Построим интеграл этого уравнения в окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}_{zw}$, определяющий решение поставленной задачи Коши. Пусть $\varphi(z) = 1 - e^z$; тогда при $f(z, w) = e^{-we^z} - 10$, получим следующее выражение для интеграла:

$$\begin{aligned}
U(z, w, \varepsilon) &= (A_f^\varepsilon \varphi)(z, w) = 1 - e^z + \varepsilon \int_0^w \frac{e^z dw_1}{e^{-w_1 e^z} - 10} - \\
&\quad - \varepsilon^2 \int_0^w \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{w_1} \frac{e^z dw_2}{e^{-w_2 e^z} - 10} \right) \frac{dw_1}{e^{-w_1 e^z} - 10} + \dots = \\
&= 1 - e^z - \frac{\varepsilon}{10} \ln \frac{10e^{we^z} - 1}{9} - \varepsilon^2 \left(\frac{we^{we^z}}{10(1 - 10e^{we^z})} + \frac{e^{-z}}{100} \ln \frac{10e^{we^z} - 1}{9} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{100} w \ln(10e^{we^z} - 1) - \frac{e^{-z}}{100} \int_0^{we^z} \ln(10e^\tau - 1) d\tau \right) + \dots
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Далее, заменив w на y , а z на x в предположении положительности ε и x , с помощью формул (2.61) и (2.62) получим:

$$\begin{aligned}
Y_0(x, \varepsilon) &= e^{-x} \ln \frac{1 + 9e^{-\frac{10(e^x - 1)}{\varepsilon}}}{10}; \\
Y_1(x, \varepsilon) &= \frac{e^{-2x}}{10} \ln \frac{1 + 9e^{-\frac{10(e^x - 1)}{\varepsilon}}}{10} + \frac{9e^{-2x} e^{-\frac{10(e^x - 1)}{\varepsilon}} \cdot \frac{e^x - 1}{\varepsilon}}{1 + 9e^{-\frac{10(e^x - 1)}{\varepsilon}}} + \\
&\quad + \frac{9e^{-2x} e^{-\frac{10(e^x - 1)}{\varepsilon}} \cdot \frac{e^x - 1}{\varepsilon} \ln \frac{1 + 9e^{-\frac{10(e^x - 1)}{\varepsilon}}}{10}}{1 + e^{-\frac{10(e^x - 1)}{\varepsilon}}} + \\
&\quad + \frac{9e^{-2x} e^{-\frac{10(e^x - 1)}{\varepsilon}}}{10(1 + 9e^{-\frac{10(e^x - 1)}{\varepsilon}})} \int_0^{\ln \frac{1 + 9e^{-\frac{10(e^x - 1)}{\varepsilon}}}{10}} \ln(10e^\tau - 1) d\tau = \\
&= \frac{e^{-2x}}{10} \ln \frac{1 + 9e^{-\frac{10(e^x - 1)}{\varepsilon}}}{10} + \bar{\bar{\partial}}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$y(x, \varepsilon) = e^{-x} \left(1 + \frac{\varepsilon e^{-x}}{10} \right) \ln \frac{1 + 9e^{-\frac{10(e^x - 1)}{\varepsilon}}}{10} + \bar{\bar{\partial}}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon) \tag{2.70}$$

— псевдоголоморфное в глобальном смысле решение поставленной задачи Коши.

Отсюда, в частности, следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = -e^{-x} \ln 10 \quad (2.71)$$

равномерно на отрезке $[\delta_1, \delta_2]$, где $\delta_2 > \delta_1 > 0$, что согласуется с теоремой Тихонова о предельном переходе.

Оба приведенных примера представляют класс голоморфно регуляризуемых задач теории сингулярных возмущений. Таковыми, как следует из теоремы 2.7, являются те, у которых главный член $U_1(z, w)$ интеграла $U(z, w, \varepsilon)$ таков, что уравнение

$$U_1(z, w) = \frac{\varphi(z)}{\varepsilon} \quad (2.72)$$

в некоторой части окрестности точки $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_{zw}$ имеет ограниченное при $\varepsilon \rightarrow 0$ (определенным образом) решение $w = W_0\left(z, \frac{\varphi(z)}{\varepsilon}\right)$ для некоторой функции $\varphi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$. В примерах z и w — вещественные и неотрицательные, а $\varepsilon \rightarrow +0$. Если же уравнение (2.72) ни при какой $\varphi(z)$ не имеет ограниченного при $\varepsilon \rightarrow 0$ (каким-либо способом) решения, то соответствующая сингулярно возмущенная задача не является голоморфно регуляризуемой. В этих условиях уравнение (2.40) нужно решать не как сингулярно возмущенное, а при фиксированном ε , как это изложено в § 1.3.

Пример 2.5. Проиллюстрируем выше сказанное уравнением

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} = 2e^{-zw} - 1 \quad (2.73)$$

с нулевым начальным условием $w(0, \varepsilon) = 0$.

Пусть $\varphi(z) \in \mathcal{A}_0$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) \neq 0$. Построим интеграл уравнения (2.73), голоморфный в точке $(0, 0, 0)$. Имеем

$$U(z, w, \varepsilon) = \varphi(z) - \varepsilon \int_0^w \frac{\varphi'(z) dw_1}{2e^{-zw_1} - 1} + \dots = -\varphi(z) + \varepsilon \varphi'(z) \ln(2 - e^{zw}) + \dots$$

Отсюда следует уравнение для определения $W_0\left(z, \frac{\varphi(z)}{\varepsilon}\right)$:

$$\varphi'(z) \ln(2 - e^{zw}) = -\frac{\varphi(z)}{\varepsilon},$$

из которого находим

$$W_0 \left(z, \frac{\varphi(z)}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{z} \ln \left(2 - e^{-\frac{\varphi(z)}{\varepsilon \varphi'(z)}} \right).$$

Если зафиксировать ε , то функция $W_0 \left(z, \frac{\varphi(z)}{\varepsilon} \right)$ будет ограниченной в окрестности точки $z_0 = 0$ комплексной плоскости $\mathbb{C}_z$, однако, при одновременном стремлении к нулю z и ε , она предела не имеет, и можно говорить лишь о обычной псевдоголоморфности (см. теорему 2.6). На практике это означает, что при фиксированном ε общий интеграл $U(z, w, \varepsilon) = 0$ определяет решение задачи Коши (2.73) в малой окрестности точки $z_0 = 0$.

В дальнейшем (см. гл. III) будет выделен класс голоморфно нерегуляризуемых задач, решения которых удовлетворяют предельному переходу.

§ 2.6. Структура особого многообразия, порождаемого точкой $\varepsilon = 0$

Как следует из определения псевдоголоморфности, особое многообразие (пограничный слой), порождаемое точкой $\varepsilon = 0$ описывается коэффициентами ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n \left(z, \frac{\varphi(z)}{\varepsilon} \right) \varepsilon^n, \quad (2.74)$$

которые не определены в точке $\varepsilon = 0$. С другой стороны, из теоремы Пуанкаре о разложении очевидным образом следует голоморфность решения $w(z, \varepsilon)$ задачи (2.40) в любой точке $\varepsilon \neq 0$. Следовательно, $\varepsilon = 0$ является изолированной особой точкой решения $w(z, \varepsilon)$, к тому же однозначного характера, поскольку для уравнения (2.40) выполнены условия единственности решения. Наиболее содержательным в теории сингулярных возмущений является случай, когда $\varepsilon = 0$ есть существенно особая точка функции $w(z, \varepsilon)$ (кроме конечного числа точек z). Обозначим через Γ гиперповерхность в $\mathbb{C}_{zw\varepsilon}$, заданную уравнением

$U(z, w, \varepsilon) = 0$, где $U(z, w, \varepsilon)$ — интеграл уравнения (2.40), голоморфный в точке $(z_0, w_0, 0)$, и такой, что $U(z_0, w_0, \varepsilon) = 0$. Пусть γ_{z_0} — множество точек z из области существования решения $w(z, \varepsilon)$, для которых $\varepsilon = 0$ является особой точкой функции $w(z, \varepsilon)$.

Теорема 2.9. *Для того, чтобы точка $\varepsilon = 0$ была существенно особой точкой решения $w(z, \varepsilon)$ задачи (2.40) необходимо и достаточно, чтобы при каждом $\tilde{w} \in \mathbb{C}_w$ и произвольном $z \in \gamma_{z_0}$ точка $(z, \tilde{w}, 0)$ была предельной точкой гиперповерхности Γ .*

Доказательство. Необходимость. Пусть точка $z \in \gamma_{z_0}$ такова, что $\varepsilon = 0$ является существенно особой точкой функции $w(z, \varepsilon)$. По теореме Пикара [82], в любой сколь угодно малой окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция $w(z, \varepsilon)$ может принимать все значения, кроме, быть может, одного. Фиксируем $\tilde{w} \in \mathbb{C}_w$ и выберем последовательность $\varepsilon_m \rightarrow 0$ так, чтобы $w_m = w(z, \varepsilon_m) \rightarrow \tilde{w}$. Поскольку $w(z, \varepsilon)$ определяется уравнением $U(z, w, \varepsilon) = 0$, то $U(z, w_m, \varepsilon_m) = 0$ и, значит, точки $(z, w_m, \varepsilon_m) \in \Gamma$ ($m \in \mathbb{N}$), а так как $(z, w_m, \varepsilon_m) \rightarrow (z, \tilde{w}, 0)$, то точка $(z, \tilde{w}, 0)$ является предельной точкой гиперповерхности Γ .

Достаточность. Пусть $(z, \tilde{w}, 0)$ — предельная точка гиперповерхности Γ . Это означает, что при любом фиксированном $z \in \gamma_{z_0}$ существуют последовательности $w_m \rightarrow \tilde{w}$ и $\varepsilon_m \rightarrow 0$ такие, что $(z, w_m, \varepsilon_m) \in \Gamma$, т.е. $U(z, w_m, \varepsilon_m) = 0$ при $\forall m \in \mathbb{N}$. Но тогда $w_m = w(z, \varepsilon_m)$, поскольку $w(z, \varepsilon)$ определяется из уравнения $U(z, w, \varepsilon) = 0$. Итак, при фиксированном z , функция $w(z, \varepsilon)$, голоморфная в кольце $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ (ε_0 — некоторое положительное число), принимает в точках $\{\varepsilon_m\}$, сколь угодно близких к нулю, значения $w_m \rightarrow \tilde{w}$. Ввиду произвольности $\tilde{w}$ это означает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w(z, \varepsilon)$$

не существует, т.е. $\varepsilon = 0$ — существенно особая точка решения $w(z, \varepsilon)$ задачи Коши (2.40) почти при всех z . Теорема доказана.

Далее произведем классификацию существенно особых многообразий.

Определение 2.4. Будем говорить, что точка $\varepsilon = 0$ порождает существенно особое многообразие линейного типа, если решение задачи (2.40) представимо в виде

$$w(z, \varepsilon) = V_1(z, \varepsilon) \tilde{\Phi} \left(\frac{\varphi(z)}{\varepsilon} \right) + V_2(z, \varepsilon), \quad (2.75)$$

где $V_1(z, \varepsilon)$ и $V_2(z, \varepsilon)$ — голоморфные в точке $(z_0, 0)$ функции, а $\tilde{\Phi}(\eta)$ — целая функция комплексной переменной η . В остальных случаях будем говорить о *многообразиях нелинейного типа*.

Многообразия линейного типа возникают, как правило, в случае обычной сходимости регуляризованных рядов (см. гл. I и пример ниже). При этом функции, описывающие такое многообразие, являются элементами пространства векторов экспоненциального типа, а пограничный слой имеет простую структуру.

Однако, в большинстве задач математической теории пограничного слоя возникают существенно особые многообразия нелинейного типа. В частности, такие многообразия мы можем наблюдать в примерах 2.3 и 2.4.

Проиллюстрируем определение многообразия линейного типа простым примером. Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dw}{dz} &= e^{3z} - we^z, \\ w(0, \varepsilon) &= w_0. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Уравнение (2.76) легко интегрируется и его решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, следующее:

$$w(z, \varepsilon) = (w_0 - 1 + \varepsilon - \varepsilon^2) e^{\frac{1-e^z}{\varepsilon}} + e^{2z} - \varepsilon e^z + \varepsilon^2. \quad (2.77)$$

Сравнивая это выражение с правой частью (2.75), найдем, что

$$\begin{aligned} V_1(z, \varepsilon) &= w_0 - 1 + \varepsilon - \varepsilon^2; \\ \tilde{\Phi}(\eta) &= e^\eta, \quad \varphi(z) = 1 - e^z; \\ V_2(z, \varepsilon) &= e^{2z} - \varepsilon e^z + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Заметим, что $V_2(z, \varepsilon)$ — основной ряд решения поставленной задачи Коши (см. гл. I). Он представляет собой многочлен по степеням ε , благодаря тому, что $e^{2z} \in \exp_F \mathbb{C}$, где $F = e^{-z} \frac{d}{dz}$ и $F^k(e^{2z}) = 0 \quad \forall k = 3, 4, \dots$.

В следующих главах введенные понятия получают свое дальнейшее развитие.

§ 2.7. Об оценке точности в методе голоморфной регуляризации

Снова рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка в вещественной области

$$\varepsilon y' = f(x, y), \quad y(x_0, \varepsilon) = y_0 \quad (2.78)$$

и оценим точность аппроксимации решения $y(x, \varepsilon)$ этой задачи на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$, построенным псевдоголоморфным решением. Пусть в данном уравнении положительный параметр ε принадлежит окрестности точки $\varepsilon = 0$ сходимости ряда (2.56) на отрезке $[x_0, \tilde{x}]$ (или даже на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$ существования решения $y(x, \varepsilon)$). Поскольку на указанном отрезке этот ряд сходится к точному решению $y(x, \varepsilon)$, то здесь вопрос точности решается так же как и в теории рядов Тейлора, а именно, остаточный член имеет вид:

$$r_n(x, \varepsilon) = \tilde{Y}_{n+1} \left(x, \exp \frac{\varphi(x)}{\hat{\varepsilon}(x)} \right) \varepsilon^{n+1}, \quad (2.79)$$

где $0 < \hat{\varepsilon}(x) < \varepsilon$ (в данном случае ε фиксировано) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x, \varepsilon) = 0 \quad (2.80)$$

равномерно по $x \in [x_0, \tilde{x}]$ (или $[x_0, x_0 + \Delta]$).

Более важным является вопрос о том, с какой точностью ряд

$$\tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Y}_n \left(x, \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0} \right) \varepsilon^n, \quad (2.81)$$

где ε_0 таково, что $\exp \frac{\varphi(x_0 + \Delta)}{\varepsilon_0} = q_0$, аппроксимирует решение $y(x, \varepsilon)$ задачи (2.78) на отрезке $[\tilde{x}, x_0 + \Delta]$, если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Заметим, что ε_0 выбрано таким образом, чтобы кривая $q = \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}$ принадлежала целиком прямоугольнику Π_{xq} .

Представим интеграл уравнения (2.78) в следующем виде:

$$U(x, y, \varepsilon) = \varphi(x) - \varepsilon V(x, y, \varepsilon), \quad (2.82)$$

где (см. (2.50))

$$\begin{aligned}
V(x, y, \varepsilon) = & \varphi'(x) \int_{y_0}^y \frac{dy_1}{f(x, y_1)} - \varepsilon \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\varphi'(x) dy_2}{f(x, y_2)} \right) \frac{dy_1}{f(x, y_1)} + \\
& + \varepsilon^2 \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_2} \frac{\varphi'(x) dy_3}{f(x, y_3)} \right) \frac{dy_2}{f(x, y_2)} \right) \frac{dy_1}{f(x, y_1)} - \dots
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Имеем уравнения для определения $y(x, \varepsilon)$ и $\tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0)$:

$$\begin{cases} \exp\{V(x, y(x, \varepsilon), \varepsilon)\} = \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, \\ \exp\{V(x, \tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0), \varepsilon)\} = \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}. \end{cases} \tag{2.84}$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$\exp\{V(x, \tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0), \varepsilon)\} - \exp\{V(x, y(x, \varepsilon), \varepsilon)\} = e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}}, \tag{2.85}$$

и применим к левой части этого равенства формулу Лагранжа конечных приращений:

$$e^{V(x, \hat{y}(x, \varepsilon), \varepsilon)} \left(\frac{\varphi'(x)}{f(x, \hat{y}(x, \varepsilon))} + O(\varepsilon) \right) (\tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0) - y(x, \varepsilon)) = e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}}; \tag{2.86}$$

здесь, $\hat{y}(x, \varepsilon) \in (\tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0), y(x, \varepsilon))$ (или $\hat{y}(x, \varepsilon) \in (y(x, \varepsilon), \tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0))$).

Из (2.86) получаем равенство

$$y(x, \varepsilon) - \tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0) = M(x, \hat{y}(x, \varepsilon), \varepsilon) \left(e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}} \right), \tag{2.87}$$

где

$$M(x, \hat{y}(x, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{\exp\{-V(x, \hat{y}(x, \varepsilon), \varepsilon)\}}{\frac{\varphi'(x)}{f(x, \hat{y}(x, \varepsilon))} + O(\varepsilon)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}} = O(\varepsilon_0^{n+1}) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \rightarrow 0, \tag{2.88}$$

так как $\varphi(x) \leq \varphi(\tilde{x}) < 0 \quad \forall x \in [\tilde{x}, x + \Delta]$.

Таким образом, если $\tilde{y}_n(x, \varepsilon, \varepsilon_0)$ — n -я частичная сумма ряда (2.81), а $\tilde{y}_n(x, \varepsilon, \varepsilon)$ — n -я частичная сумма ряда (2.56), то в соответствии с (2.88) $\forall x \in [\tilde{x}, x_0 + \Delta]$ верна оценка:

$$\begin{aligned}
y(x, \varepsilon) - \tilde{y}_n(x, \varepsilon, \varepsilon) &= y(x, \varepsilon) - \tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0) + \tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0) - \tilde{y}_n(x, \varepsilon, \varepsilon) = \\
&= M(x, \hat{y}(x, \varepsilon), \varepsilon) \left(e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\tilde{Y}_k \left(x, e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}} \right) - \tilde{Y}_k \left(x, e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} \right) \right) \varepsilon^k + \\
&\quad + \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{Y}_k \left(x, e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}} \right) \varepsilon^k = M(x, \hat{y}(x, \varepsilon), \varepsilon) \left(e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}} \right) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{Y}_k \left(x, e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_k(x)}} \right)}{\partial q} \left(e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} \right) + R_n \left(x, e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}}, \varepsilon \right) = \\
&= \left[M(x, \hat{y}(x, \varepsilon), \varepsilon) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{Y}_k \left(x, e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_k(x)}} \right)}{\partial q} \varepsilon^k \right] \left(e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} \right) + \\
&\quad + R_n \left(x, e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}}, \varepsilon \right) = O(\varepsilon_0^{n+1}) + O(\varepsilon^{n+1}) + O(\varepsilon^{n+1}) = O(\varepsilon_0^{n+1}) + O(\varepsilon^{n+1}),
\end{aligned} \tag{2.89}$$

где $0 < \varepsilon < \hat{\varepsilon}_k(x) < \varepsilon_0$, а $R_n \left(x, e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}}, \varepsilon \right)$ — n -й остаток равномерно сходящегося на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$ ряда (2.81).

Итак, метод голоморфной регуляризации, в случае сингулярно возмущенного дифференциального уравнения первого порядка, позволяет построить псевдоголоморфное решение в виде сходящегося в обычном смысле ряда по степеням малого параметра ε , причем на отрезке $[x_0, \tilde{x}] \subset \subset [x_0, x_0 + \Delta]$

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Y}_n \left(x, e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} \right) \varepsilon^n, \tag{2.90}$$

а на отрезке $[\tilde{x}, x_0 + \Delta]$ частичные суммы $\tilde{y}_n(x, \varepsilon, \varepsilon)$ этого ряда аппроксимируют его с точностью $O(\varepsilon_0^{n+1}) + O(\varepsilon^{n+1})$.

Ситуация, обусловленная обычной сходимостью ряда (2.90) на некотором промежутке $[x_0, \tilde{x}]$, принципиально отличает метод голоморфной регуляризации от известных асимптотических методов, при использовании которых в любой окрестности начальной точки можно

построить только лишь асимптотически сходящиеся ряды по степеням ε , представляющие решения сингулярно возмущенных задач.

Однако главной отличительной особенностью метода голоморфной регуляризации является то, что в классических методах решения сингулярно возмущенных задач оценка аппроксимации происходит при $\varepsilon \rightarrow 0$, а в методе голоморфной регуляризации — при $n \rightarrow \infty$, поскольку в конкретных задачах ε мало, но фиксированно.

ГЛАВА III. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И МЕТОД ГОЛОМОРФНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В этой главе будут рассматриваться уравнения высших порядков, разрешенные относительно старшей производной. Как и в случае уравнения первого порядка, строятся коммутационные соотношения и эквивалентные им гомоморфизмы алгебр голоморфных функций различного числа переменных, образами которых являются интегралы систем, равносильных данным уравнениям. При этом, удается построить точную последовательность алгебр и операторов, действующих между ними. Сингулярно возмущенные уравнения рассматриваются с малым параметром только при старшей производной, благодаря чему существенно особое многообразие, порожденное точкой $\varepsilon = 0$, можно описать с помощью одной функции. Для этих уравнений построены голоморфные по параметру интегралы и тем самым обобщена теорема Пуанкаре о разложении. Далее, дано определение псевдоголоморфного решения сингулярно возмущенных уравнений высших порядков и даны достаточные условия глобальной псевдоголоморфности. Ввиду особой практической значимости, уравнения второго порядка рассмотрены отдельно. Наконец, рассмотрены сингулярно возмущенные уравнения второго порядка, не принадлежащие классу голоморфно регуляризуемых задач. Такие уравнения встречаются в химической кинетике. Для них доказаны предельные теоремы, а последние, как известно, составляют основу качественной теории сингулярных возмущений. При этом, результаты, полученные в одномерном случае, легко распространяются на двумерный направленный кинетический процесс [60].

§ 3.1. Уравнения высших порядков и гомоморфизмы алгебр голоморфных функций различного числа переменных

Пусть $\mathbb{C}_{zw\bar{v}}^{k+1} = \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w \times \mathbb{C}_{v_1} \times \dots \times \mathbb{C}_{v_{k-1}}$, где $\mathbb{C}_{v_m}$ — комплексная плоскость переменной v_m при $m = \overline{1, k-1}$. Алгебру функций

одной комплексной переменной z , голоморфных в точке $z_0 \in \mathbb{C}_z$, обозначим, как и ранее, через $\mathcal{A}_{z_0}$. Пусть $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$ — алгебра функций $(k+1)$ -й комплексной переменной $(z, w, v_1, \dots, v_{k-1})$, голоморфных в точке $P_0^{k+1}(z_0, w_0, \bar{v}_0)$, где $\bar{v}_0 = (v_{10}, \dots, v_{k-10})$, с введенной в ней топологией индуктивного предела.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение k -го порядка, разрешенное относительно старшей производной,

$$\frac{d^k w}{dz^k} = f\left(z, w, \frac{dw}{dz}, \dots, \frac{d^{k-1}w}{dz^{k-1}}\right) \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$w(z_0) = w_0, \quad w'(z_0) = v_{10}, \dots, \quad w^{(k-1)}(z_0) = v_{k-10}. \quad (3.2)$$

Так же как и в предыдущей главе, обозначим через $\mathcal{F}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$ подалгебру алгебры $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$, состоящую из функций $h(z, w, \bar{v}) \equiv h(z, w, v_1, \dots, v_{k-1})$ таких, что $h(z_0, w_0, \bar{v}_0) \neq 0$. Что же касается собственно уравнения (3.1), то мы будем писать $f(z, w, \bar{v}) \in \mathcal{F}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$, имея в виду, что $f(z, w, \bar{v}) \neq 0$ в некоторой окрестности $\Omega_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1} \subset \mathbb{C}_{zw}^{k+1}$ точки $P_0^{k+1}(z_0, w_0, \bar{v}_0)$. Сведем уравнение (3.1) к системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dz} = v_1, \\ \frac{dv_1}{dz} = v_2, \\ \\ \frac{dv_{k-2}}{dz} = v_{k-1}, \\ \frac{dv_{k-1}}{dz} = f(z, w, v_1, ..., v_{k-1}) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

с начальными условиями

$$w(z_0) = w_0, \ v_1(z_0) = v_{10}, \dots, v_{k-1}(z_0) = v_{k-10}. \quad (3.4)$$

Уравнение интегралов этой системы имеет следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial z} + v_1 \frac{\partial U}{\partial w} + v_2 \frac{\partial U}{\partial v_1} + \dots + v_{k-1} \frac{\partial U}{\partial v_{k-2}} + f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}) \frac{\partial U}{\partial v_{k-1}} = 0. \quad (3.5)$$

(Чтобы не было путаницы в обозначениях, в рассматриваемом общем случае будем считать, что $k \geq 3$. Если же $k = 2$, то вместо (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) и (3.5) будем иметь, соответственно:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = f\left(z, w, \frac{dw}{dz}\right), \quad (3.1')$$

$$w(z_0) = w_0, \quad w'(z_0) = v_0, \quad (3.2')$$

$$\begin{cases} \frac{dw}{dz} = v, \\ \frac{dv}{dz} = f(z, w, v), \end{cases} \quad (3.3')$$

$$w(z_0) = w_0, \quad v(z_0) = v_0, \quad (3.4')$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} + v \frac{\partial U}{\partial w} + f(z, w, v) \frac{\partial U}{\partial v} = 0 \quad (3.5')).$$

Для сокращения записи обозначим через $L^{(k)}$ линейный дифференциальный оператор с частными производными:

$$L^{(k)} = \frac{\partial}{\partial z} + v_1 \frac{\partial}{\partial w} + \dots + v_{k-1} \frac{\partial}{\partial v_{k-2}} \quad (3.6)$$

(соответственно для $k = 2$:

$$L^{(2)} = \frac{\partial}{\partial z} + v \frac{\partial}{\partial w}. \quad (3.6'))$$

Тогда уравнение (3.5) примет следующий вид:

$$L^{(k)}U + f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}) \frac{\partial U}{\partial v_{k-1}} = 0. \quad (3.7)$$

Предположим, что функция φ принадлежит одной из алгебр: $\mathcal{A}_{z_0}$, $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$, $\{\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{m+1}\}_{m=2}^{k-1}$; в случае уравнения (3.5') φ является элементом одной из первых двух алгебр — либо $\mathcal{A}_{z_0}$, либо $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$. Ясно, что $\mathcal{A}_{z_0} \subset \mathcal{U}_{z_0 w_0} \subset \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^3 \subset \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^4 \subset \dots \subset \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{m+1} \subset \dots$, причем вложения непрерывны вместе с топологиями.

Сформулируем и докажем теорему об интеграле системы (3.3).

Теорема 3.1. *Если $f(z, w, \bar{v}) \in \mathcal{F}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$ и функция φ удовлетворяет сформулированному выше условию, то ряд*

$$(A_f \varphi)(z, w, \bar{v}) = \varphi - \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{L^{(k)} \varphi dv_{k-1}^{(1)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(1)})} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \frac{L^{(k)} \varphi dv_{k-1}^{(2)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(2)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(1)})} - \\
& - \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(2)}} \frac{L^{(k)} \varphi dv_{k-1}^{(3)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(3)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(2)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(2)})} \right) \cdot \\
& \cdot \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(1)})} + \dots
\end{aligned} \tag{3.8}$$

сходится равномерно в некоторой замкнутой окрестности точки $P_0^{k+1}(z_0, w_0, \bar{v}_0)$ к функции $U(z, w, v_1, \dots, v_{k-1})$, являющейся голоморфным интегралом системы (3.3).

Замечание 1. Переменная v_{k-1} в формуле (3.6) при каждом интегрировании считается равной $v_{k-1}^{(m)}$ — соответствующей переменной интегрирования.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3.1. Поскольку

$$f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}) \frac{\partial \varphi}{\partial v_{k-1}} = 0,$$

так как функция φ не зависит от переменной v_{k-1} , и

$$\begin{aligned}
& f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}) \frac{\partial U_1}{\partial v_{k-1}} = -L^{(k)} \varphi, \\
& \dots\dots\dots \\
& f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}) \frac{\partial U_n}{\partial v_{k-1}} = -L^{(k)} U_{n-1},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где U_n — $(n+1)$ -й член ряда (3.8), то этот ряд, очевидно, удовлетворяет уравнению (3.5). Для доказательства равномерной сходимости ряда заметим, что оценки, проведенные при доказательстве теоремы 2.3, не зависят от названия переменных дифференцирования, а, значит, их можно заменить на одну: $z = w = v_1 = \dots = v_{k-2} = t$. Тогда, оператор (3.6) примет вид:

$$L_t^{(k)} = (1 + v_1 + \dots + v_{k-1}) \frac{\partial}{\partial t}$$

и, ввиду ограниченности области изменения переменных $(v_1, \dots, v_{k-1})$, будет иметь место оценка

$$|U_n(z, w, v_1, \dots, v_{k-1})| \leq M\mathcal{K}^n |v_{k-1} - v_{k-10}|^n \quad (3.10)$$

в некоторой замкнутой окрестности точки $P_0^{k+1}(z_0, w_0, \bar{v}_0)$, принадлежащей области $\Omega_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$, аналогичная оценке (2.8) (со своими положительными константами M и $\mathcal{K}$), которая и приводит к равномерной сходимости. Теорема доказана.

Замечание 2. В случае, когда $k = 2$, формула (3.8) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} (A_f \varphi)(z, w, v) = & \varphi - \int_{v_0}^v \frac{L^{(2)} \varphi dv^{(1)}}{f(z, w, v^{(1)})} + \int_{v_0}^v \left(L^{(2)} \int_{v_0}^{v^{(1)}} \frac{L^{(2)} \varphi dv^{(2)}}{f(z, w, v^{(2)})} \right) \frac{dv^{(1)}}{f(z, w, v^{(1)})} - \\ & - \int_{v_0}^v \left(L^{(2)} \int_{v_0}^{v^{(1)}} \left(L^{(2)} \int_{v_0}^{v^{(2)}} \frac{L^{(2)} \varphi dv^{(3)}}{f(z, w, v^{(3)})} \right) \frac{dv^{(2)}}{f(z, w, v^{(2)})} \right) \frac{dv^{(1)}}{f(z, w, v^{(1)})} + \dots, \end{aligned} \quad (3.8')$$

где φ либо элемент $\mathcal{A}_{z_0}$, либо элемент $\mathcal{U}_{z_0 w_0}$,

Ясно, что для дальнейшего нам потребуются k независимых интегралов системы (3.3). Построим k независимых решений уравнения (3.5). Для построения решения $U_{zw\bar{v}}^{[1]}$ этого уравнения, в качестве φ выберем функцию $\varphi^{[1]}(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$, зависящую только от z , такую, что $\varphi^{[1]}(z_0) = 0$ и $\frac{d\varphi^{[1]}(z_0)}{dz} \neq 0$; для $U_{zw\bar{v}}^{[2]} = \varphi^{[2]}(z, w) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0}$, зависящую только от z и w , такую, что $\varphi^{[2]}(z_0, w_0) = 0$ и $\frac{d\varphi^{[2]}(z_0, w_0)}{dw} \neq 0$; для $U_{zw\bar{v}}^{[3]} = \varphi^{[3]}(z, w, v_1) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0 v_{10}}^3$, зависящую только от z , w и v_1 , такую, что $\varphi^{[3]}(z_0, w_0, v_{10}) = 0$ и $\frac{d\varphi^{[3]}(z_0, w_0, v_{10})}{dv_1} \neq 0$ и т.д.; для $U_{zw\bar{v}}^{[k]} = \varphi^{[k]}(z, w, v_1, \dots, v_{k-2}) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k$, зависящую только от переменных $z, w, v_1, \dots, v_{k-2}$, такую, что $\varphi^{[k]}(z_0, w_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}) = 0$ и $\frac{d\varphi^{[k]}(z_0, w_0, v_{10}, \dots, v_{k-20})}{dv_{k-2}} \neq 0$. Далее, рассмотрим определитель

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}, \varphi^{[3]}, \dots, \varphi^{[k]})}{\partial(z, w, v_1, \dots, v_{k-2})} \Big|_{P_0^k} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi^{[1]}}{\partial z} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial\varphi^{[2]}}{\partial z} & \frac{\partial\varphi^{[2]}}{\partial w} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^{[k]}}{\partial z} & \frac{\partial\varphi^{[k]}}{\partial w} & \frac{\partial\varphi^{[k]}}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial\varphi^{[k]}}{\partial v_{k-2}} \end{vmatrix} = \\
&= \frac{\partial\varphi^{[1]}}{\partial z} \cdot \frac{\partial\varphi^{[2]}}{\partial w} \cdot \frac{\partial\varphi^{[3]}}{\partial v_1} \cdot \dots \cdot \frac{\partial\varphi^{[k]}}{\partial v_{k-2}} \Big|_{P_0^k} \neq 0,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где $P_0^k(z_0, w_0, v_{10}, \dots, v_{k-20})$ — проекция точки P_0^{k+1} на пространство переменных $z, w, v_1, \dots, v_{k-2}$.

Поэтому существует некоторая окрестность точки $P_0^{k+1}(z_0, w_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}) \in \mathbb{C}_{zw\bar{v}}^{k+1}$, в которой независимые интегралы $U^{[1]} = (A_f \varphi^{[1]})(z, w, \bar{v})$, $U^{[2]} = (A_f \varphi^{[2]})(z, w, \bar{v})$, $\dots$, $U^{[k]} = (A_f \varphi^{[k]})(z, w, \bar{v})$. В частности, выбор φ можно осуществить следующим образом:

$$\varphi^{[1]} = z, \quad \varphi^{[2]} = w, \quad \varphi^{[3]} = v_1, \quad \dots, \quad \varphi^{[k]} = v_{k-2}. \tag{3.12}$$

Перейдем к построению коммутационного соотношения. Пусть $\varphi(z, w, v_1, \dots, v_{k-2})$ — произвольная функция из алгебры $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k$ (здесь индекс $\bar{v}_0 = (v_{10}, \dots, v_{k-20})$). Тогда, по теореме 3.1 образом φ линейного отображения $A_f : \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$ (а здесь, в последней алгебре, индекс $\bar{v}_0 = (v_{10}, \dots, v_{k-20})$) является интеграл $U^{[k]}(z, w, \bar{v})$, что в соответствии с общей теорией систем дифференциальных уравнений означает существование некоторой функции Φ , зависящей от k переменных, такой, что

$$\begin{aligned}
(A_f \varphi)(z, w, \bar{v}) &= \Phi((A_f z)(z, w, \bar{v}), (A_f w)(z, w, \bar{v}), (A_f v_1)(z, w, \bar{v}), \dots, \\
&\quad (A_f v_{k-2})(z, w, \bar{v})).
\end{aligned}$$

Положим в равенстве (3.13) $v_{k-1} = v_{k-20}$, тогда

$$\varphi(z, w, v_1, \dots, v_{k-2}) = \Phi(z, w, v_1, \dots, v_{k-2}),$$

т.е. $\varphi \equiv \Phi$, и значит,

$$\begin{aligned}
(A_f \varphi)(z, w, \bar{v}) &= \varphi((A_f z)(z, w, \bar{v}), (A_f w)(z, w, \bar{v}), \\
&\quad (A_f v_1)(z, w, \bar{v}), \dots, (A_f v_{k-2})(z, w, \bar{v}))
\end{aligned} \tag{3.14}$$

— требуемое коммутационное соотношение.

Докажем, что A_f является непрерывным гомоморфизмом алгебры $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$. Действительно, если $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$, то

$$\begin{aligned} (A_f(\varphi_1 \varphi_2))(z, w, \bar{v}) &= (\varphi_1 \varphi_2)((A_f z)(z, w, \bar{v}), (A_f w)(z, w, \bar{v}), \\ & (A_f v_1)(z, w, \bar{v}), \dots, (A_f v_{k-2})(z, w, \bar{v})) = \varphi_1((A_f z)(z, w, \bar{v}), (A_f w)(z, w, \bar{v}), \\ & (A_f v_1)(z, w, \bar{v}), \dots, (A_f v_{k-2})(z, w, \bar{v})) \cdot \varphi_2((A_f z)(z, w, \bar{v}), (A_f w)(z, w, \bar{v}), \\ & (A_f v_1)(z, w, \bar{v}), \dots, (A_f v_{k-2})(z, w, \bar{v})) = \\ & [(A_f \varphi_1)(z, w, \bar{v})] \cdot [(A_f \varphi_2)(z, w, \bar{v})]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Непрерывность, а также то, что если A — непрерывный гомоморфизм алгебры $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$, имеет место коммутационное соотношение (3.14), доказывается аналогично соответствующим утверждением теоремы 2.1.

Рассмотрим теперь бесконечную последовательность дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$w' = f_1(z, w), \quad (3.16_1)$$

$$w(z_0) = w_0;$$

$$w'' = f_2(z, w, w'), \quad (3.16_2)$$

$$w(z_0) = w_0, \quad w'(z_0) = v_{10};$$

$$w''' = f_3(z, w, w', w''), \quad (3.16_3)$$

$$w(z_0) = w_0, \quad w'(z_0) = v_{10}, \quad w''(z_0) = v_{20};$$

.....

$$w^{(k)} = f_k(z, w, w', \dots, w^{(k-1)}), \quad (3.16_k)$$

$$w(z_0) = w_0, \quad w'(z_0) = v_{10}, \quad \dots, \quad w^{(k-1)}(z_0) = v_{k-10};$$

.....

с правыми частями $f_1(z, w) \in \mathcal{F}_{z_0 w_0}$, $f_2(z, w, v_1) \in \mathcal{F}_{z_0 w_0 v_{10}}^3$, $\dots$, $f_k(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}) \in \mathcal{F}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$, $\dots$.

Построим последовательность уравнений интегралов, введя операторы $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$:

$$S_1 U \equiv \frac{\partial U}{\partial z} + f_1(z, w) \frac{\partial U}{\partial w} = 0, \quad (3.17_1)$$

$$S_2 U \equiv \frac{\partial U}{\partial z} + v_1 \frac{\partial U}{\partial w} + f_2(z, w, v_1) \frac{\partial U}{\partial v_1} = 0, \quad (3.17_2)$$

$$S_3 U \equiv \frac{\partial U}{\partial z} + v_1 \frac{\partial U}{\partial w} + v_2 \frac{\partial U}{\partial v_1} + f_3(z, w, v_1, v_2) \frac{\partial U}{\partial v_2} = 0, \quad (3.17_3)$$

.....

$$S_k U \equiv \frac{\partial U}{\partial z} + v_1 \frac{\partial U}{\partial w} + v_2 \frac{\partial U}{\partial v_1} + \dots + v_{k-1} \frac{\partial U}{\partial v_{k-2}} + f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}) \frac{\partial U}{\partial v_{k-1}} = 0, \quad (3.17_k)$$

.....

В соответствии с предыдущим, имеем цепь гомоморфизмов:

$$\mathcal{A}_{z_0} \xrightarrow{A_{f_1}} \mathcal{U}_{z_0 w_0} \xrightarrow{A_{f_2}} \mathcal{U}_{z_0 w_0 v_{10}}^3 \xrightarrow{A_{f_3}} \dots \xrightarrow{A_{f_{k-1}}} \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k \xrightarrow{A_{f_k}} \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1} \xrightarrow{A_{f_{k+1}}} \dots$$

Далее, как следует из (3.17), $\text{Im } A_{f_k} \subset \text{Ker } S_k$ при $k = 1, 2, \dots$. И обратно, если $U \in \text{Ker } S_k$, т.е. является интегралом системы, к которой сводится (3.16_k), то

$$U = \Psi((A_{f_k} z)(z, w, \bar{v}), (A_{f_k} w)(z, w, \bar{v}), (A_{f_k} v_1)(z, w, \bar{v}), \dots, (A_{f_k} v_{k-2})(z, w, \bar{v})) = (A_{f_k} \Psi)(z, w, \bar{v})$$

для некоторой функции Ψ . Следовательно, $U \in \text{Im } A_{f_k}$, т.е. $\text{Ker } S_k \subset \text{Im } A_{f_k}$ и, поэтому, $\text{Im } A_{f_k} = \text{Ker } S_k$. Обозначим через $R_k = A_{f_k} S_{k-1}$ и рассмотрим последовательность

$$\mathcal{U}_{z_0 w_0} \xrightarrow{R_2} \mathcal{U}_{z_0 w_0 v_{10}}^3 \xrightarrow{R_3} \mathcal{U}_{z_0 w_0 v_{10} v_{20}}^4 \xrightarrow{R_4} \dots \xrightarrow{R_{k-1}} \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k \xrightarrow{R_k} \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1} \xrightarrow{R_{k+1}} \dots \quad (3.19)$$

Имеем, $R_{k+1} R_k = A_{f_{k+1}} S_k A_{f_k} S_{k-1} = A_{f_{k+1}} O S_k = O$, где O — нулевой оператор, т.е. $\text{Im } R_k \subset \text{Ker } R_{k+1}$. В этом случае говорят [25], что последовательность (3.19) полноточна и фактор-пространство $H_k = \text{Ker } R_{k+1} / \text{Im } R_k$ называется k -м пространством когомологий. Покажем, что $H_k = \{0\} \forall k = 2, 3, \dots$. Для этого достаточно доказать, что $\text{Ker } R_{k+1} \subset \text{Im } R_k$. Действительно, пусть $V \in \text{Ker } R_{k+1}$, или, по другому, $V \in \text{Ker } A_{f_{k+1}} S_k$. Значит, $A_{f_{k+1}} S_k V = 0$. Но $\text{Ker } A_{f_{k+1}} = \{0\}$, поскольку $A_{f_{k+1}}$ осуществляет коммутационное соотношение (см. также гл. II). Поэтому $S_k V = 0$, что в свою очередь и означает, что $V \in \text{Im } R_k$, поскольку

$\text{Im } A_{f_k} = \text{Ker } S_k$. Таким образом, $H_k = \{0\}$ при $k = 2, 3, \dots$ и, следовательно, последовательность (3.19) точна [25].

§ 3.2. Голоморфные по малому параметру интегралы сингулярно возмущенных уравнений высших порядков

Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу Коши для уравнения k -го порядка, с малым параметром при старшей производной

$$\varepsilon \frac{d^k w}{dz^k} = f \left(z, w, \frac{dw}{dz}, \dots, \frac{d^{k-1}w}{dz^{k-1}} \right), \quad (3.20)$$

$$w(z_0, \varepsilon) = w_0, \quad w'(z_0, \varepsilon) = v_{10}, \dots, w^{(k-1)}(z_0, \varepsilon) = v_{k-10}.$$

Пусть правая часть уравнения (3.20) подчинена условиям, сформулированным в § 3.1 (см. с. 98). Сведем это уравнение к системе вместе с начальными условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dz} = v_1, \\ \frac{dv_1}{dz} = v_2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dv_{k-2}}{dz} = v_{k-1}, \\ \varepsilon \frac{dv_{k-1}}{dz} = f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}), \end{array} \right. \quad (3.21)$$

$$w(z_0, \varepsilon) = w_0, \quad v_1(z_0, \varepsilon) = v_{10}, \dots, v_{k-1}(z_0, \varepsilon) = v_{k-10},$$

и запишем соответствующее ей уравнение интегралов в окрестности точки $P_0^{k+1}(z_0, w_0, \bar{v}_0)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\partial U}{\partial z} + v_1 \frac{\partial U}{\partial w} + v_2 \frac{\partial U}{\partial v_1} + \dots + v_{k-1} \frac{\partial U}{\partial v_{k-2}} \right) + \\ + f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}) \frac{\partial U}{\partial v_{k-1}} = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ввиду практической значимости случая $k = 2$, запишем соответствующие уравнения и систему:

$$\varepsilon \frac{d^2 w}{dz^2} = f(z, w, w'), \quad (3.20')$$

$$w(z_0, \varepsilon) = w_0, \quad w'(z_0, \varepsilon) = v_0;$$

$$\begin{cases} \frac{dw}{dz} = v, \\ \varepsilon \frac{dw}{dz} = f(z, w, v); \end{cases} \quad (3.21')$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial U}{\partial z} + v \frac{\partial U}{\partial w} \right) + f(z, w, v) \frac{\partial U}{\partial v} = 0, \quad (3.22')$$

Далее, пользуясь обозначением (3.6), перепишем уравнение (3.22) в виде:

$$\varepsilon L^{(k)} U + f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}) \frac{\partial U}{\partial v_{k-1}} = 0. \quad (3.23)$$

Сформулируем и докажем теорему о существовании (в глобальном смысле) голоморфных по малому параметру ε интегралов системы (3.21).

Теорема 3.2. *Если функция $f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1})$ голоморфна в окрестности $\Omega_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$ точки $P_0^{k+1}(z_0, w_0, v_{10}, \dots, v_{k-10})$ и не обращается там в ноль, то отображения $A_f^\varepsilon: \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$, заданные по формуле*

$$\begin{aligned} (A_f^\varepsilon \varphi)(z, w, \bar{v}) = & \varphi - \varepsilon \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{L^{(k)} \varphi dv_{k-1}^{(1)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(1)})} + \\ & + \varepsilon^2 \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \frac{L^{(k)} \varphi dv_{k-1}^{(2)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(2)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(1)})} - \\ & - \varepsilon^3 \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(2)}} \frac{L^{(k)} \varphi dv_{k-1}^{(3)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(3)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(2)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(2)})} \right) \cdot \\ & \cdot \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(1)})} + \dots \quad \forall \varphi(z, w, v_1, \dots, v_{k-2}) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k, \end{aligned} \quad (3.24)$$

представляют собой голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ семейство непрерывных гомоморфизмов алгебры $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$. При этом

$\text{Im } A_f^\varepsilon$ состоит из интегралов системы (3.21) в окрестности точки $P_0^{k+1}(z_0, w_0, \bar{v}_0)$ и ряд (3.24) сходится равномерно на любом компакте из $\Omega_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$ в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (зависящей от этого компакта).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Будем искать решение уравнения (3.23) в виде ряда по степеням ε :

$$U(z, w, \bar{v}, \varepsilon) = U_0(z, w, \bar{v}) + \varepsilon U_1(z, w, \bar{v}) + \dots + \varepsilon^n U_n(z, w, \bar{v}) + \dots \quad (3.25)$$

Тогда, в соответствии с методом неопределенных коэффициентов, получим следующую цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} f(z, w, \bar{v}) \frac{\partial U_0}{\partial v_{k-1}} &= 0, \\ f(z, w, \bar{v}) \frac{\partial U_1}{\partial v_{k-1}} &= -L^{(k)} U_0, \\ &\dots\dots\dots \\ f(z, w, \bar{v}) \frac{\partial U_n}{\partial v_{k-1}} &= -L^{(k)} U_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

которая совпадает с последовательностью уравнений (3.9). Поэтому имеет место равенство (3.24). Равномерная сходимост ь ряда (3.24) на произвольном компакте из $\Omega_{z_0, w_0, \bar{v}_0}^{k+1}$ достигается за счет соответствующего (неравенству (3.10), в котором M и $\mathcal{K}$ зависят от компакта) выбора окрестности точки $\varepsilon = 0$. Коммутационное соотношение

$$\begin{aligned} (A_f^\varepsilon \varphi)(z, w, \bar{v}) &= \varphi((A_f^\varepsilon z)(z, w, \bar{v}), (A_f^\varepsilon w)(z, w, \bar{v}), \\ &(A_f^\varepsilon v_1)(z, w, \bar{v}), \dots, (A_f^\varepsilon v_{k-2})(z, w, \bar{v})), \\ \forall \varphi &\in \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k, \end{aligned} \quad (3.27)$$

из которого вытекает гомоморфизм $A_f^\varepsilon: \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^k \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0 \bar{v}_0}^{k+1}$, доказывается так же как и в § 3.1. Теорема доказана.

Итак, теорема 3.2 существования голоморфных по малому параметру интегралов систем вида (3.21) носит глобальный характер и обобщает

теорему Пуанкаре о разложении. А именно, если в уравнении

$$\frac{d^k w}{dz^k} = f \left(z, w, \frac{dw}{dz}, \dots, \frac{d^{k-1} w}{dz^{k-1}}, \varepsilon \right), \quad (3.28)$$

правая часть голоморфна в точке $\varepsilon = 0$ (равномерно по $(z, w, \bar{v})$ на каждом компакте из $\Omega_{z_0, w_0, \bar{v}_0}^{k+1}$), то это уравнение имеет единственное голоморфное по ε решение, удовлетворяющее начальным условиям $w(z_0, \varepsilon) = w_0$, $w'(z_0, \varepsilon) = v_{10}$, $\dots$, $w^{(k-1)}(z_0, \varepsilon) = v_{k-10}$. Ясно, что решение $w(z, \varepsilon)$ задачи Коши (3.20) не может (в общем случае) быть голоморфным в точке $\varepsilon = 0$, поскольку при $\varepsilon = 0$ теоремы существования не имеют места. Зато голоморфную зависимость (даже целую) левой части уравнения (3.20) от ε наследуют интегралы системы, эквивалентные этому уравнению.

Замечание к теореме 3.2. Так же, как и в случае уравнения первого порядка, зависящего от двух параметров ε и μ (см. с. 73), интегралы системы, к которой сводится уравнение

$$\varepsilon \frac{d^k w}{dz^k} = \tilde{f} \left(z, w, \frac{dw}{dz}, \dots, \frac{d^{k-1} w}{dz^{k-1}}, \mu \right),$$

голоморфным образом зависят от обоих малых параметров, если только функция $\tilde{f}(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(1)}, \mu)$ является голоморфной в точке $(z_0, w_0, v_{10}, \dots, v_{k-10}, 0)$ и не обращается в ней в ноль. Это очевидным образом следует из формулы (3.24) при замене $f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(1)})$ на $\tilde{f}(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(1)}, \mu)$

§ 3.3. Псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных уравнений высших порядков

В этом параграфе будет исследован вопрос о существовании псевдоголоморфных решений уравнений высших порядков.

Определение 3.1. Решение $w(z, \varepsilon)$ задачи Коши (3.20) называется *псевдоголоморфным* в точке $\varepsilon = 0$, если существует функция $W(z, \eta, \varepsilon)$, голоморфная в точке $(z_0, 0, 0)$, такая, что для любого ε из некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ существует окрестность $\omega_{z_0}^\varepsilon \subset \mathbb{C}_z$ точки z_0 , в которой выполняется равенство

$$w(z, \varepsilon) = W \left(z, \frac{\varphi(z)}{\varepsilon}, \varepsilon \right) \quad (3.29)$$

для некоторой функции $\varphi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$, такой, что $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) \neq 0$.

Если при этом ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(z, \eta) \varepsilon^n, \quad (3.30)$$

представляющий функцию (3.29), сходится равномерно на некотором компакте $T_{z_0} \subset \mathbb{C}_z$ ($z_0 \in T_{z_0}$) при каждом η из некоторого неограниченного связного множества $G \subset \mathbb{C}_\eta$ в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, зависящей от η , то решение $w(z, \varepsilon)$ называется *псевдо-голоморфным в глобальном смысле*.

Замечание 1 к определению 3.1. То, что регуляризующей функции $\varphi(z)$ достаточно одной, несмотря на высокий порядок уравнения (3.20), является характерной особенностью сингулярно возмущенных уравнений высокого порядка именно такого вида, т.е. разрешенных относительно старшей производной и, когда параметр ε присутствует только при ней. В главе IV, посвященной системе, мы увидим, что, скажем, для уравнения

$$\varepsilon^k \frac{d^k w}{dz^k} = f \left(z, w, \varepsilon \frac{dw}{dz}, \dots, \varepsilon^{k-1} \frac{d^{k-1} w}{dz^{k-1}} \right)$$

одной регуляризующей функции, в общем случае, недостаточно, поскольку это уравнение сводится к системе, где все переменные быстрые:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{dw}{dz} = v_1, \\ \varepsilon \frac{dv_1}{dz} = v_2, \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon \frac{dv_{k-2}}{dz} = v_{k-1}, \\ \varepsilon \frac{dv_{k-1}}{dz} = f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}), \end{array} \right.$$

в отличие от системы (3.21), в которой только переменная v_{k-1} является быстрой, а переменные $w, v_1, \dots, v_{k-2}$ — медленными [76].

Вначале докажем теорему о существовании псевдоголоморфного в обычном смысле решения задачи Коши (3.20).

Теорема 3.3. Пусть для правой части уравнения (3.20) выполнены условия теоремы 3.2. Тогда задача Коши (3.20) имеет решение $w(z, \varepsilon)$, псевдоголоморфное в точке $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Последовательно полагая в равенстве (3.24) $\varphi = z - z_0$, $\varphi = w - w_0$, $\varphi = v_1 - v_{10}$, ..., $\varphi = v_{k-2} - v_{k-20}$, получим k независимых интегралов:

$$\begin{aligned} U^{[1]}(z, w, \bar{v}, \varepsilon) &= (A_f^\varepsilon(z - z_0))(z, w, \bar{v}), \\ U^{[2]}(z, w, \bar{v}, \varepsilon) &= (A_f^\varepsilon(w - w_0))(z, w, \bar{v}), \\ U^{[3]}(z, w, \bar{v}, \varepsilon) &= (A_f^\varepsilon(v_1 - v_{10}))(z, w, \bar{v}), \\ &\dots\dots\dots \\ U^{[k]}(z, w, \bar{v}, \varepsilon) &= (A_f^\varepsilon(v_{k-2} - v_{k-20}))(z, w, \bar{v}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Имеем, соответственно, k первых интегралов системы (3.21): $U^{[m]}(z, w, \bar{v}, \varepsilon) = 0$, $m = \overline{1, k}$. Далее, первые слагаемые с $m = 2, \dots, k$ оставим без изменения, а первый интеграл $U^{[1]} = 0$ (следуя схеме, изложенной в гл. II, § 2.) представим в виде:

$$\tilde{U}^{[1]}(z, w, \bar{v}, \varepsilon) = \frac{z - z_0}{\varepsilon}, \quad (3.32)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{[1]}(z, w, \bar{v}, \varepsilon) &= \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{L^{(k)} z dv_{k-1}^{(1)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(1)})} - \\ &- \varepsilon \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \frac{L^{(k)} z dv_{k-1}^{(2)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(2)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(1)})} + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(2)}} \frac{L^{(k)} z dv_{k-1}^{(3)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(3)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(2)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(2)})} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(z, w, v_1, \dots, v_{k-1}^{(1)})} + \dots$$

То, что функция $\tilde{U}^{[1]}(z, w, \bar{v}, \varepsilon)$ является голоморфной в точке $\varepsilon = 0$ (равномерно по $(z, w, \bar{v})$ в некоторой замкнутой окрестности точки $P_0^{k+1}(z_0, w_0, v_{10}, \dots, v_{k-10})$), следует непосредственно из доказательства теоремы 3.2. Обозначим правую часть уравнения (3.32) через η и запишем систему уравнений, неявно определяющую решение $w(z, \varepsilon)$ задачи Коши (3.20):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}^{[1]}(z, w, \bar{v}, \varepsilon) = \eta, \\ U^{[2]}(z, w, \bar{v}, \varepsilon) = 0, \\ \\ U^{[k]}(z, w, \bar{v}, \varepsilon) = 0. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Так как якобиан

$$\left. \frac{\partial(\tilde{U}^{[1]}, U^{[2]}, \dots, U^{[k]})}{\partial(v_{k-1}, w, v_1, \dots, v_{k-2})} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ P_0^{k+1}(z_0, w_0, \bar{v})}} = \frac{1}{f(z_0, w_0, v_{10}, \dots, v_{k-10})} \neq 0, \quad (3.35)$$

то, в соответствии с теоремой о неявной функции, система (3.34) определяет функции

$$\left\{ \begin{array}{l} w = W(z, \eta, \varepsilon), \\ v_1 = V_1(z, \eta, \varepsilon), \\ \\ v_{k-1} = V_{k-1}(z, \eta, \varepsilon), \end{array} \right. \quad (3.36)$$

голоморфные в точке $(z_0, 0, 0)$ и являющиеся решением системы (3.21) при каждом фиксированном достаточно малом ε , в некоторой окрестности точки z_0 , диаметр которой зависит от ε . Стоит отметить при этом, что сужение левой части равенства (3.35) на $\varepsilon = 0$ можно убрать. Теорема доказана.

Замечание 2 к определению 3.1. Из доказательства теоремы 3.3 следует, что помимо функции $W(z, \eta, \varepsilon)$, голоморфными в точке $(z_0, 0, 0)$ являются также и функции $V_1(z, \eta, \varepsilon), \dots, V_{k-1}(z, \eta, \varepsilon)$. Этот факт можно было бы отразить и в определении псевдоголоморфности, хотя бы потому, что в конечном итоге, мы имеем дело не с самим уравнением (3.20), а с

системой (3.21) (см. гл. IV, определение 4.2). Однако, чтобы подчеркнуть единственность (см. замечание 1 к определению 3.1), мы дали определение псевдоголоморфности, идентичное случаю уравнения первого порядка.

Теперь перейдем к исследованию глобальной псевдоголоморфности. Для того чтобы сформулировать соответствующее утверждение, так же, как и в § 2.5, будем рассматривать уравнение (3.20) в вещественной области, предполагая малый параметр ε положительным. Заменим независимую переменную z на x , а переменную w на y . Тогда задача Коши (3.20) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon y^{(k)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}), \\ y(x_0, \varepsilon) &= y_0, \quad y'(x_0, \varepsilon) = v_{10}, \dots, y^{(k-1)}(x_0, \varepsilon) = v_{k-10}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Теорема 3.4. *Если для некоторой функции $\varphi(x) \in \mathcal{A}_{x_0}$, такой, что $\varphi(x_0) = 0$ и $\varphi'(x) < 0 \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \Delta]$, где $\Delta > 0$, уравнение*

$$\varphi'(x) \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}, v_{k-1}^{(1)})} = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, \quad (3.38)$$

имеет решение $v_{k-1} = V_{k-10} \left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right)$, равномерно ограниченное при $\varepsilon \rightarrow +0$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$, как только точка $P_0^{k+1}(y_0, v_{10}, \dots, v_{k-20})$ принадлежит некоторому множеству Ω_0^{k-1} пространства R^{k-1} вещественных переменных $(y, v_1, \dots, v_{k-2})$, то решение $y(x, \varepsilon)$ задачи Коши (3.37) является псевдоголоморфным в глобальном смысле.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Имеем первый интеграл, порожденный $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию теоремы:

$$\begin{aligned} U^{[1]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) &= (A_f^\varepsilon \varphi)(x, y, \bar{v}) = \varphi(x) - \varepsilon \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{L^{(k)} \varphi dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \frac{L^{(k)} \varphi dv_{k-1}^{(2)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(2)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} - \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^3 \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(2)}} \frac{L^{(k)} \varphi dv_{k-1}^{(3)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(3)})} \right) \right. \\
& \left. \cdot \frac{dv_{k-1}^{(2)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(2)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} + \dots = 0.
\end{aligned}$$

Напомним, что линейный дифференциальный оператор

$$L^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x} + v_1 \frac{\partial}{\partial y} + v_2 \frac{\partial}{\partial v_1} + \dots + v_{k-1} \frac{\partial}{\partial v_{k-2}}, \quad (3.40)$$

и при интегрировании в формуле (3.39) переменная v_{k-1} совпадает с переменной $v_{k-1}^{(m)}$ с соответствующим индексом m .

Перепишем (3.39) с учетом (3.40) в виде:

$$\begin{aligned}
& \varphi'(x) \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} - \\
& -\varepsilon \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \frac{\varphi'(x) dv_{k-1}^{(2)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(2)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} + \quad (3.41) \\
& +\varepsilon^2 \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(2)}} \frac{\varphi'(x) dv_{k-1}^{(3)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(3)})} \right) \right. \\
& \left. \cdot \frac{dv_{k-1}^{(2)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(2)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} - \dots = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Если обозначить левую часть (3.41) через $\tilde{U}_1^{[1]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon)$, а разность

$$\tilde{U}^{[1]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) - \varphi'(x) \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})}$$

через $\tilde{\tilde{U}}^{[1]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon)$, то уравнение (3.41) примет следующий вид:

$$\varphi'(x) \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} + \tilde{\tilde{U}}^{[1]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}. \quad (3.42)$$

Далее положим

$$g(x, y, \bar{v}) = \exp \left\{ \varphi'(x) \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} \right\}, \quad (3.43)$$

и пропотенцируем уравнение (3.42) по основанию e :

$$g(x, y, \bar{v}) \exp\{\tilde{U}^{[1]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon)\} = \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}. \quad (3.44)$$

Заметим, что $\tilde{U}^{[1]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon)$ голоморфна в точке $(x_0, y_0, \bar{v}_0, 0)$ в силу построения и тождественно равна нулю при $\varepsilon = 0$. Обозначим $\exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}$ через q и запишем следующую систему:

$$\begin{cases} g(x, y, \bar{v}) \exp\{\tilde{U}^{[1]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon)\} = q, \\ U^{[2]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) = 0, \\ U^{[3]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ U^{[k]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (3.45)$$

где

$$\begin{aligned} U^{[2]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) &= (A_f^\varepsilon(y - y_0))(x, y, \bar{v}), \\ U^{[3]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) &= (A_f^\varepsilon(v_1 - v_{10}))(x, y, \bar{v}), \\ &\dots\dots\dots \\ U^{[k]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) &= (A_f^\varepsilon(v_{k-2} - v_{k-20}))(x, y, \bar{v}), \end{aligned} \quad (3.46)$$

причем, $0 < q \leq 1 \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta]$ в силу условия теоремы.

Обозначим

$$\Phi(x, y, \bar{v}, q, \varepsilon) \equiv g(x, y, \bar{v}) \exp\{\tilde{U}^{[1]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon)\} - q \quad (3.47)$$

и перепишем систему (3.45):

$$\begin{cases} \Phi(x, y, \bar{v}, q, \varepsilon) = 0, \\ U^{[2]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) = 0, \\ U^{[3]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ U^{[k]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (3.48)$$

Фиксируем $x^* \in [x_0, x_0 + \Delta]$ и $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0)$ (ε_0 — некоторое достаточно малое положительное число). Тогда, в соответствии с условиями теоремы, существует u_{k-1}^* такое, что

$$g(x^*, y_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}, v_{k-1}^*) = q^*, \quad (3.49)$$

где $q^* = \exp \left\{ \frac{\varphi(x^*)}{\varepsilon^*} \right\}$, причем множество всех таких v_{k-1}^* ограничено при $\varepsilon^* \rightarrow +0$. Поскольку $\widetilde{\widetilde{U}}^{[1]}(x, y, \overline{v}, 0) = 0$, то

$$\Phi(x^*, y_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}, v_{k-1}^*, q^*, 0) = 0. \quad (3.50)$$

Другие уравнения системы (3.48) также, как нетрудно видеть, выполняются в точке $(x^*, y_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}, v_{k-1}^*, q^*, 0)$. К тому же, якобиан

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial(\Phi, U^{[2]}, U^{[3]}, \dots, U^{[k]})}{\partial(v_{k-1}, y, v_1, \dots, v_{k-2})} \right|_{P_*^{k+1}(x^*, y_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}, v_{k-1}^*)}^{\varepsilon=0} = \\ & = \frac{\varphi'(x^*)}{f(x^*, y_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}, v_{k-1}^*)} \neq 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Поэтому, в соответствии с теоремой о неявной функции, система уравнений (3.48) имеет решение

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{k-1} = V_{k-1}(x, q, \varepsilon), \\ y = Y(x, q, \varepsilon), \\ v_1 = V_1(x, q, \varepsilon), \\ \\ v_{k-2} = V_{k-2}(x, q, \varepsilon), \end{array} \right. \quad (3.52)$$

голоморфное в некоторой окрестности точки $Q^*(X^*, q^*, 0)$. Из теории функций нескольких комплексных переменных следует, что ряды

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} V_{k-1n}(x, q) \varepsilon^n, \\ & \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x, q) \varepsilon^n, \\ & \sum_{n=0}^{\infty} V_{1n}(x, q) \varepsilon^n, \\ & \dots\dots\dots \\ & \sum_{n=0}^{\infty} V_{k-2n}(x, q) \varepsilon^n, \end{aligned} \tag{3.53}$$

представляющие функции (3.52), сходятся в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$ равномерно на любом компакте из некоторой окрестности $\sigma_{x^*q^*}$ точки $R^*(x^*, q^*)$. Далее, так же, как и при доказательстве теоремы 2.7 выберем достаточно малое q_0 , удовлетворяющее неравенству $0 < q_0 < 1$, покроем прямоугольник $\Pi_{xq} = [x_0, x_0 + \delta] \times [q_0, 1]$ на плоскости (x, q) окрестностями $\{\sigma_{x^*q^*}\}$ и выберем конечное подпокрытие $\{\sigma_{x^*q^*}\}_1^N$. Тогда, ряды (3.53) будут сходиться в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (наименьшей из соответствующих подпокрытию) равномерно на прямоугольнике Π_{xq} , что и означает глобальную псевдоголоморфность. Теорема 3.4. доказана.

Имеет место замечание, аналогичное замечанию к теореме 2.7. А именно, если в уравнении (3.37) положительный параметр ε из вышеуказанной окрестности точки $\varepsilon = 0$ и кривая $q = \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}$ лежит целиком в прямоугольнике Π_{xq} , то функция

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \left(x, \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right) \varepsilon^n \quad (3.54)$$

является точным решением задачи Коши (3.37) на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$; если же кривая $q = \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}$ не принадлежит целиком этому прямоугольнику, то ряд (3.54) задает решение на отрезке $[x_0, \tilde{x}]$, где $\tilde{x}$ — корень уравнения $\exp \left\{ \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right\} = q_0$.

Сделаем еще одно замечание к теореме 3.4, касающееся существования ограниченного при $\varepsilon \rightarrow +0$ решения $v_{k-1} = V_{k-1} \left(x, \exp \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right)$ уравнения (3.36). Нетрудно видеть, что существование такого решения эквивалентно существованию положительно устойчивых по Лагранжу решений уравнения

$$\frac{d\tilde{v}_{k-1}}{ds} = f(x, y_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}, \tilde{v}_{k-1}) \quad (3.55)$$

с начальными условиями $\tilde{v}_{k-1}(0) = \tilde{v}_{k-10}$, близкими к v_{k-10} . В этом уравнении $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$ выступает в роли параметра, $s \geq 0$ — в роли независимой переменной, а точка $P_0^{k-1}(y_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}) \in \Omega_0^{k-1}$.

Изложим алгоритм построения ряда

$$Y(x, \eta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x, \eta) \varepsilon^n, \quad (3.56)$$

представляющего при $\eta = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}$ решение $y(x, \varepsilon)$ задачи Коши (3.37).
Запишем первые интегралы системы, эквивалентной этой задаче:

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{[1]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) &= \varphi'(x) \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} - \\ &- \varepsilon \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \frac{\varphi'(x) dv_{k-1}^{(2)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(2)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(2)}} \frac{\varphi'(x) dv_{k-1}^{(3)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(3)})} \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \frac{dv_{k-1}^{(2)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(2)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} - \dots = \eta, \\ \tilde{U}^{[2]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) &= y - y_0 - \varepsilon v_1 \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \frac{v_1 dv_{k-1}^{(2)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(2)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} - \dots = 0, \\ \tilde{U}^{[3]}(x, y, \bar{v}, \varepsilon) &= v_1 - v_{10} - \varepsilon v_2 \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \left(L^{(k)} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}^{(1)}} \frac{v_2 dv_{k-1}^{(2)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(2)})} \right) \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y, v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}^{(1)})} - \dots = 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3.57_1)$$

$$\begin{aligned} &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3.57_2)$$

$$\begin{aligned} &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3.57_3)$$

при этом определитель системы (3.58) равен:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial(\tilde{U}^{[1]}, U^{[2]}, \dots, U^{[k]})}{\partial(y, v_1, \dots, v_{k-1})} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ v_{k-1}=V_{k-10}\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) \\ y=y_0, v_1=v_{10}, \dots, v_{k-2}=v_{k-20}}} = \\ & = \frac{\varphi'(x)}{f\left(x, y_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}, V_{k-10}\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)\right)}. \end{aligned}$$

Далее, дифференцируя (3.58) по ε , найдем вектор-столбец

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial \varepsilon^2} \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial \varepsilon^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial \varepsilon^2} \end{pmatrix}_{\substack{\varepsilon=0 \\ v_{k-1}=V_{k-10}\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) \\ y=y_0, v_1=v_{10}, \dots, v_{k-2}=v_{k-20}}} ,$$

и т.д.

В итоге получим решение задачи Коши (3.37) в виде сходящегося ряда по степеням ε :

$$y(x, \varepsilon) = y_0 + \varepsilon v_{10} \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(x, y_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}, v_{k-1}^{(1)})} \Big|_{v_{k-1}=V_{k-10}\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)} + \dots \quad (3.60)$$

§ 3.4. Голоморфная регуляризация уравнений второго порядка. Примеры

Обозначим через $\mathcal{A}_{z_0}$, как обычно, алгебру функций комплексной переменной z , голоморфных в точке z_0 ; через $\mathcal{A}_{z_0 w_0}$ — алгебру функций комплексных переменных (z, w) , голоморфных в точке (z_0, w_0) ; через $\mathcal{U}_{z_0 w_0 v_0}$ — алгебру функций трех комплексных переменных (z, w, v) , голоморфных в точке (z_0, w_0, v_0) . В этих алгебрах введем топологию индуктивного предела вложенных друг в друга пространств

функций, голоморфных в окрестностях, стягивающихся в указанные точки. Очевидно, что $\mathcal{A}_{z_0} \subset \mathcal{A}_{z_0 w_0} \subset \mathcal{U}_{z_0 w}$, и вложения непрерывны вместе с топологиями.

Рассмотрим задачу Коши с комплексным параметром ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon w'' &= f(z, w, w'), \\ w(z_0, \varepsilon) &= w_0, \quad w'(z_0, \varepsilon) = v_0, \end{aligned} \quad (3.61)$$

и введем линейный дифференциальный оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial z} + v \frac{\partial}{\partial w},$$

действующий из $\mathcal{A}_{z_0 w_0}$ в $\mathcal{U}_{z_0 w_0 v_0}$.

Теорема 3.2'. Если $f(z, w, v) \in \mathcal{U}_{z_0 w_0 v_0}$ и $f(z_0, w_0, v_0) \neq 0$, то отображения $A_f^\varepsilon: \mathcal{A}_{z_0 w_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 w_0 v_0}$, заданные формулой

$$\begin{aligned} (A_f^\varepsilon \varphi)(z, w, v) &= \varphi(z, w) - \varepsilon \int_{v_0}^v \frac{L\varphi dv_1}{f(z, w, v_1)} + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \frac{L\varphi dv_2}{f(z, w, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(z, w, v_1)} - \\ &- \varepsilon^3 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \left(L \int_{v_0}^{v_2} \frac{L\varphi dv_3}{f(z, w, v_3)} \right) \frac{dv_2}{f(z, w, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(z, w, v_1)} + \dots, \end{aligned} \quad (3.62)$$

образуют голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ семейство непрерывных голоморфизмов алгебры $\mathcal{A}_{z_0 w_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0 w_0 v_0}$, удовлетворяющих коммутационному соотношению

$$(A_f^\varepsilon \varphi)(z, w, v) = \varphi((A_f^\varepsilon z)(z, w, v), (A_f^\varepsilon w)(z, w, v)). \quad (3.63)$$

При этом, $\text{Im } A_f^\varepsilon$ состоит из интегралов системы

$$\begin{cases} w' = v, \\ \varepsilon v' = f(z, w, v), \end{cases} \quad (3.64)$$

в окрестности точки (z_0, w_0, v_0) , голоморфных в точке $\varepsilon = 0$, а интегралы $(A_f^\varepsilon z)(z, w, v)$ и $(A_f^\varepsilon w)(z, w, v)$ являются независимыми.

Эта теорема является аналогом теоремы 3.2 для уравнения порядка $k \geq 3$. Для простоты записи, переменные интегрирования обозначены через $v_1, v_2, \dots$, причем коэффициент v в операторе L всякий раз приобретает индекс соответствующей переменной интегрирования. Сформулируем теперь теорему, аналогичную теореме 3.4, рассматривая уравнение (3.61) в вещественной области

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' &= f(x, y, y'), \\ y(x_0, \varepsilon) &= y_0, \quad y'(x_0, \varepsilon) = v_0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

Теорема 3.4'. Если для некоторой функции $\varphi(x) \in \mathcal{A}_{x_0}$, такой, что $\varphi(x_0) = 0$ и $\varphi'(x) < 0 \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \Delta]$, уравнение

$$\varphi'(x) \int_{v_0}^v \frac{dv_1}{f(x, y_0, y_1)} = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \quad (3.66)$$

имеет решение $v = V_0 \left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right)$, равномерно ограниченное при $\varepsilon \rightarrow +0$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$, как только точка y_0 принадлежит некоторому множеству Ω_0 оси переменной y , то решение $y(x, \varepsilon)$ задачи Коши (3.65) является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$ в глобальном смысле.

Замечание. Условия теоремы будут выполнены, если уравнение

$$\frac{d\tilde{v}}{ds} = f(x, y_0, \tilde{v}), \quad (3.67)$$

с начальным условием $\tilde{v}(0) = \tilde{v}_0$, близким к v_0 , в котором $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$ и выступает в роли параметра, имеет положительно устойчивое по Лагранжу решение (при условии, что $y_0 \in \Omega_0$). Если же это решение будет асимптотически устойчивым по Ляпунову при $s \rightarrow +\infty$, то при $\varepsilon \rightarrow +0$ решение $y(x, \varepsilon)$ будет стремиться на некотором полуинтервале $(x_0, x_0 + \tilde{\Delta}]$ к решению $\alpha(x)$ предельной задачи

$$f(x, y, y') = 0; \quad y(x_0) = y_0, \quad (3.68)$$

при условии, что $\alpha(x)$ существует на отрезке $[x_0, x_0 + \tilde{\Delta}]$ (см. [1], с. 35) и голоморфно на нем.

Далее, построим независимые первые интегралы системы

$$\begin{cases} y' = v, \\ \varepsilon y' = f(x, y, v), \end{cases} \quad (3.69)$$

полагая в равенстве

$$\begin{aligned} & \varphi(x, y) - \varepsilon \int_{v_0}^v \frac{L \varphi dv_1}{f(x, y, v_1)} + \\ & + \varepsilon^2 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \frac{L \varphi dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} - \\ & - \varepsilon^3 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \left(L \int_{v_0}^{v_2} \frac{L \varphi dv_3}{f(x, y, v_3)} \right) \frac{dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

последовательно $\varphi(x, y) = \varphi(x)$ и $\varphi(x, y) = y - y_0$. (В уравнении (3.70) $L = \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$.) Имеем, обозначив $\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}$ через η :

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{[1]}(x, y, v, \varepsilon) & \equiv \varphi'(x) \int_{v_0}^v \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} - \varepsilon \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \frac{\varphi'(x) dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} + \\ & + \varepsilon^2 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \left(L \int_{v_0}^{v_2} \frac{\varphi'(x) dv_3}{f(x, y, v_3)} \right) \frac{dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} - \dots = \eta, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{[2]}(x, y, v, \varepsilon) & \equiv y - y_0 - \varepsilon \int_{v_0}^v \frac{v_1 dv_1}{f(x, y, v_1)} + \\ & + \varepsilon^2 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \frac{v_2 dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} - \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Теперь продифференцируем равенства (3.71) и (3.72) по ε дважды:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{U}^{[1]}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \tilde{U}^{[1]}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial \tilde{U}^{[1]}}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{\partial \tilde{U}^{[2]}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \tilde{U}^{[2]}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial \tilde{U}^{[2]}}{\partial \varepsilon}; \end{cases} \quad (3.73)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{U}^{[1]}}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial \tilde{U}^{[1]}}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \varepsilon^2} = -\frac{\partial^2 \tilde{U}^{[1]}}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}^{[1]}}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \right)^2 - \frac{\partial^2 \tilde{U}^{[1]}}{\partial y \partial \varepsilon} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} - \\ - 2 \frac{\partial^2 \tilde{U}^{[1]}}{\partial v \partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial^2 \tilde{U}^{[1]}}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right)^2 - \frac{\partial^2 \tilde{U}^{[1]}}{\partial v \partial \varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{\partial U^{[2]}}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial U^{[2]}}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \varepsilon^2} = -\frac{\partial^2 U^{[2]}}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial^2 U^{[2]}}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \right)^2 - \frac{\partial^2 U^{[2]}}{\partial y \partial \varepsilon} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} - \\ - 2 \frac{\partial^2 U^{[2]}}{\partial v \partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial^2 U^{[2]}}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right)^2 - \frac{\partial^2 U^{[2]}}{\partial v \partial \varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}. \end{array} \right. \quad (3.74)$$

В итоге получились две системы для нахождения $\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial \varepsilon^2}$ при $\varepsilon = 0$, $y = y_0$, $v = V_0(x, \eta)$. Вычислим значения производных функций $\tilde{U}^{[1]}$ и $U^{[2]}$ при $\varepsilon = 0$, $y = y_0$, встречающихся в системах:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{U}^{[1]}}{\partial y} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= \varphi'(x) \frac{\partial}{\partial y} \int_{v_0}^v \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} \Big|_{y=y_0}; \quad \left. \frac{\partial \tilde{U}^{[1]}}{\partial v} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} = \frac{\varphi'(x)}{f(x, y_0, v)}; \\ \left. \frac{\partial \tilde{U}^{[1]}}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= - \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \frac{\varphi'(x) dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} \Big|_{y=y_0}; \\ \left. \frac{\partial U^{[2]}}{\partial y} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= 1; \quad \left. \frac{\partial U^{[2]}}{\partial v} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} = 0; \quad \left. \frac{\partial \tilde{U}^{[2]}}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} = - \int_{v_0}^v \frac{v_1 dv_1}{f(x, y_0, v_1)}; \\ \left. \frac{\partial^2 \tilde{U}^{[1]}}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= 2 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \left(L \int_{v_0}^{v_2} \frac{\varphi'(x) dv_3}{f(x, y, v_3)} \right) \frac{dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} \Big|_{y=y_0}; \\ \left. \frac{\partial^2 \tilde{U}^{[1]}}{\partial y^2} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= \varphi'(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\int_{v_0}^v \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} \right) \Big|_{y=y_0}; \\ \left. \frac{\partial^2 \tilde{U}^{[1]}}{\partial v \partial y} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= \varphi'(x) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f(x, y, v)} \right) \Big|_{y=y_0}; \\ \left. \frac{\partial^2 \tilde{U}^{[1]}}{\partial v^2} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= \varphi'(x) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{f(x, y_0, v)} \right); \\ \left. \frac{\partial^2 U^{[2]}}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= 2 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \frac{v_2 dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} \Big|_{y=y_0}; \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 U^{[2]}}{\partial y^2} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= 0; & \left. \frac{\partial^2 U^{[2]}}{\partial v \partial y} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= 0; & \left. \frac{\partial^2 \tilde{U}^{[2]}}{\partial v^2} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= 0; \\
\left. \frac{\partial^2 \tilde{U}^{[1]}}{\partial y \partial \varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= - \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \frac{\varphi'(x) dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} \right] \Big|_{y=y_0}; \\
\left. \frac{\partial^2 \tilde{U}^{[1]}}{\partial v \partial \varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= - \frac{1}{f(x, y_0, v)} \left(L \int_{v_0}^v \frac{\varphi'(x) dv_1}{f(x, y, v_1)} \right) \Big|_{y=y_0}; \\
\left. \frac{\partial^2 U^{[2]}}{\partial y \partial \varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= - \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{v_0}^v \frac{v_1 dv_1}{f(x, y, v_1)} \right) \Big|_{y=y_0}; \\
\left. \frac{\partial^2 U^{[2]}}{\partial v \partial \varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= - \frac{v}{f(x, y_0, v)}.
\end{aligned}$$

Тогда, из системы (3.73), с использованием формул (3.75), получим, что

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= \int_{v_0}^v \frac{v_1 dv_1}{f(x, y_0, v_1)}; \\
\left. \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= \frac{f(x, y_0, v)}{\varphi'(x)} \left[\int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \frac{\varphi'(x) dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} \Big|_{y=y_0} - \right. \\
&\quad \left. - \varphi'(x) \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{v_0}^v \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} \right) \Big|_{y=y_0} \int_{v_0}^v \frac{v_1 dv_1}{f(x, y_0, v_1)} \right],
\end{aligned} \tag{3.76}$$

а из системы (3.74) найдем

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 y}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0}} &= 2 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \frac{v_2 dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} \Big|_{y=y_0} - \\
&\quad - \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{v_0}^v \frac{v_1 dv_1}{f(x, y, v_1)} \right) \Big|_{y=y_0} \int_{v_0}^v \frac{v_1 dv_1}{f(x, y_0, v_1)} - \\
&\quad - \frac{v}{\varphi'(x)} \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \frac{\varphi'(x) dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} \Big|_{y=y_0} + \\
&\quad + v \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{v_0}^v \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} \right) \Big|_{y=y_0} \int_{v_0}^v \frac{v_1 dv_1}{f(x, y_0, v_1)}.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Итак,

$$y(x, \varepsilon) = y_0 + \varepsilon \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0 \\ v=V_0(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon})}} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial \varepsilon^2} \bigg|_{\substack{\varepsilon=0 \\ y=y_0 \\ v=V_0(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon})}} + \dots \quad (3.78)$$

— точное решение задачи Коши (3.65) на некотором отрезке $[x_0, \tilde{x}]$.

Пример 3.1. Уравнение погранслоного типа [4, 9]:

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' + yy' - y &= 0, \quad \varepsilon > 0, \\ y(x_0, \varepsilon) &= y_0 > 0; \quad y'(x_0, \varepsilon) = v_0 \neq 1. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Запишем систему, эквивалентную (3.79):

$$\begin{aligned} \begin{cases} y' = v, \\ \varepsilon v' = y(1 - v), \end{cases} \\ y(x_0, \varepsilon) = y_0; \quad v(x_0, \varepsilon) = v_0. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Пусть $\varphi(x) = -(x - x_0)$, тогда равенства (3.71), (3.72) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \ln \frac{v-1}{v_0-1} + \frac{\varepsilon}{y^3} \left(v \ln \frac{v-1}{v_0-1} + v_0 - \ln \frac{v-1}{v_0-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{v-1}{v_0-1} \right) + \dots = \eta, \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$y = x - x_0 + y_0 + \frac{\varepsilon}{y} (v - v_0) + \dots \quad (3.82)$$

Из (3.81) найдем

$$V_0 \left(x, \frac{x - x_0}{\varepsilon} \right) = 1 + (v_0 - 1) \exp \left\{ -\frac{y_0(x - x_0)}{\varepsilon} \right\}. \quad (3.83)$$

Следовательно,

$$y = x - x_0 + y_0 + \frac{\varepsilon}{y_0} (v_0 - 1) \left(\exp \left\{ -\frac{y_0(x - x_0)}{\varepsilon} \right\} - 1 \right) + \dots \quad (3.84)$$

Заметим, что $\alpha(x) = x - x_0 + y_0$ — решение предельной задачи

$$y(y' - 1) = 0, \quad y(x_0) = y_0. \quad (3.85)$$

Пример 3.2. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon y'' &= e^{-2xy} - (y')^2, \\ y(0, \varepsilon) &= y'(0, \varepsilon) = 0.\end{aligned}\tag{3.86}$$

Для системы

$$\begin{cases} y' = v, \\ \varepsilon v' = e^{-2xy} - v^2 \end{cases}\tag{3.87}$$

с начальными условиями $y(0) = v(0)$ имеем первые интегралы, полагая $\varphi(x) = -x$:

$$\begin{cases} \frac{e^{xy}}{2} \ln \frac{e^{-xy} - v}{e^{-xy} + v} + \dots = \eta, \\ y = -\frac{\varepsilon}{2} \ln(1 - e^{2xy} v^2) + \dots \end{cases}\tag{3.88}$$

Тогда

$$y(x, \varepsilon) = \varepsilon \ln \operatorname{ch} \frac{x}{\varepsilon} + \dots\tag{3.89}$$

§ 3.5. Голоморфно нерегуляризуемые задачи и гомоморфизмы в качественной теории сингулярных возмущений

В сформулированных выше достаточных условиях глобальной псевдоголоморфности делается упор на ограниченность при $\varepsilon \rightarrow +0$ решения уравнения (3.38) (или уравнения (3.66)), что, как мы выяснили, гарантируется положительной устойчивостью по Лагранжу. В этих условиях можно говорить о голоморфной регуляризуемости сингулярно возмущенной задачи (см. также с. 88). В настоящем параграфе будет рассмотрена ситуация, когда уравнения

$$\varphi'(z) \int_{v_{k-10}}^{v_{k-1}} \frac{dv_{k-1}^{(1)}}{f(z, w_0, v_{10}, \dots, v_{k-20}, v_{k-1}^{(1)})} = \frac{\varphi(z)}{\varepsilon},\tag{3.90}$$

$$\varphi'(z) \int_{w_0}^v \frac{dv_1}{f(z, w_0, v_1)} = \frac{\varphi(z)}{\varepsilon},\tag{3.91}$$

рассматриваемые в комплексной области, не имеют ограниченных решений $v = V_0 \left(z, \frac{\varphi(z)}{\varepsilon} \right)$ ни в какой окрестности точки z_0 , как бы не стремилось к нулю комплексное ε , ни при какой функции $\varphi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$, и ни при каком w_0 . Такой случай можно назвать голоморфно нерегуляризуемым, хотя при этом все равно существует псевдоголоморфное в обычном смысле решение сингулярно возмущенной задачи (см. теорему 3.3). Поэтому, в рамках метода голоморфной регуляризации, речь может идти только о предельном поведении решения, при стремлении параметра ε к нулю. Такие задачи возникают в химической кинетике.

Основой качественной теории сингулярных возмущений являются предельные теоремы. Каким бы методом не решалась сингулярно возмущенная задача, вопрос о пределе решения при стремлении параметра к нулю, является одним из главных — по сути дела, это основной вопрос всей теории сингулярных возмущений. Фундаментальной в этой теории является теорема А.Н. Тихонова о предельном переходе [80, 81]. Здесь, на основе гомоморфизмов алгебр голоморфных функций различного числа переменных, строятся голоморфные по параметру интегралы дифференциальных уравнений второго порядка, из которых следуют утверждения о предельном переходе.

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = h(x, y), \quad (3.92)$$

где $h(x, y)$ — вещественно-голоморфная в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq a\}$$

функция. Напомним, что бесконечно дифференцируемая функция $f(x, y)$ называется вещественно-голоморфной на компакте $G \subset R^2$, если существуют положительные константы M и C такие, что

$$|D^\alpha f| \leq MC^{|\alpha|} (|\alpha|!) \quad \forall (x, y) \in G, \quad |\alpha| = 0, 1, 2, \dots \quad (3.93)$$

Здесь, как обычно,

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Предположим, что предельное уравнение $h(x, y) = 0$ имеет единственное решение $y = \varphi(x)$, вещественно-голоморфное на отрезке $[0, 1]$, причем кривая $\Gamma: y = \varphi(x)$ принадлежит Π , когда $x \in [0, 1]$. Обозначим через $\Pi_\gamma = \{(x, y) \in \Pi: |h(x, y)| \geq \gamma > 0\}$. Как и ранее, сводим уравнение (3.92) к системе

$$\begin{cases} y' = v, \\ \varepsilon v' = h(x, y), \end{cases} \quad (3.94)$$

и составляем уравнение интегралов этой системы:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} \right) + h(x, y) \frac{\partial U}{\partial v} = 0. \quad (3.95)$$

Пусть $L = \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y}$, тогда уравнение (3.95) примет вид

$$\varepsilon LU + h(x, y) \frac{\partial U}{\partial v} = 0, \quad (3.96)$$

решение которого будем искать в виде следующего ряда по степеням ε :

$$U(x, y, v, \varepsilon) = U_0(x, y, v) + \varepsilon U_1(x, y, v) + \dots + \varepsilon^n U_n(x, y, v) + \dots \quad (3.97)$$

В соответствии с методом неопределенных коэффициентов, получим уравнения для определения коэффициентов этого ряда:

$$\begin{aligned} U_0(x, y) &= \psi(x, y), \\ h(x, y) \frac{\partial U_1}{\partial v} &= -LU_0, \\ h(x, y) \frac{\partial U_2}{\partial v} &= -LU_1, \\ &\dots\dots\dots \\ h(x, y) \frac{\partial U_n}{\partial v} &= -LU_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3.98)$$

Фиксируем $\gamma > 0$, тогда на множестве Π_γ , имеем:

$$U(x, y, v, \varepsilon) = (A_h^\varepsilon \psi)(x, y, v) = \psi(x, y) - \varepsilon \int_{v_0}^v \frac{L\psi dv_1}{h(x, y)} +$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon^2 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \frac{L\psi dv_2}{h(x,y)} \right) \frac{dv_1}{h(x,y)} - \\
& -\varepsilon^3 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \left(L \int_{v_0}^{v_2} \frac{L\psi dv_3}{h(x,y)} \right) \frac{dv_2}{h(x,y)} \right) \frac{dv_1}{h(x,y)} + \dots
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Здесь $\psi(x, y)$ — голоморфная на прямоугольнике Π функция, а v_0 — произвольное число. Принципиальным отличием ряда (3.99) от ряда (3.70) является независимость функции h от переменной v . В дальнейшем мы увидим, что как раз из-за этого любая задача, связанная с уравнением (3.92), и становится голоморфно нерегуляризуемой.

Для доказательства сходимости ряда (3.97) в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ равномерно на Π_γ применим комбинаторный подход, основанный на следующей лемме.

Лемма 3.1. Пусть функции $g_1(x), \dots, g_n(x)$ n раз дифференцируемы в точке x_0 . Тогда, если в выражении

$$(g_n(x)(g_{n-1}(x)(\dots(g_1(x))_x)_x \dots)_x \tag{3.100}$$

раскрыть скобки по формуле производной произведения и заменить $g_r^{(s)}(x)$, где $1 \leq r \leq n$, $0 \leq s \leq n$ на $s!$, то полученная сумма будет равна $(2n-1)!!$.

Доказательство леммы следует из комбинаторного равенства

$$\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in RT(n)} k_1! k_2! \dots k_n! = (2n-1)!!, \tag{3.101}$$

где $RT(n)$ — множество всех правых транспозиций n объектов. А именно, пусть первоначально имеется n разноцветных шариков, расположенных по одному в n ящиках. Любой шарик, кроме крайнего правого, разрешается переместить в произвольный ящик, находящийся правее; $k_1, k_2, \dots, k_n$ — количество шариков, находящихся в данный момент времени в 1-м, 2-м, ..., n -м ящиках. Очевидно, что $k_1 + k_2 + \dots + k_n = n$; $0 \leq k_m \leq m$, $1 \leq m \leq n-1$; $1 \leq k_n \leq n$. Тогда, левая часть равенства (3.101) представляет собой число разбиений n шариков на n групп (при правой транспозиции)

с перестановками внутри каждой группы. С другой стороны, если формула верна для n шариков, то добавление $(n + 1)$ -го шарика увеличивает число транспозиций в $(2n + 1)$ раз, поскольку добавленный $(n + 1)$ -й шарик может находиться в любом из $(n + 1)$ ящиков ($(n + 1)$ -й ящик тоже добавляется), либо быть сдвинутым вправо из любого из n ящиков — всего $n + 1 + n = 2n + 1$ возможных ситуаций.

Проиллюстрируем лемму. Имеем,

$$g'_1, (n = 1): 1! = (2 \cdot 1 - 1)!! = 1;$$

$$(g_2 g'_1)' = g'_2 g'_1 + g_2 g''_1, (n = 2): 1!1! + 0!2! = (2 \cdot 2 - 1)!! = 3;$$

$$(g_3(g_2 g'_1))' = g'_3 g'_2 g'_1 + g_3 g''_2 g'_1 + g_3 g'_2 g''_1 + g'_3 g_2 g''_1 + g_3 g'_2 g'_1 + g_3 g_2 g'''_1,$$

$$(n = 3): 1!1!1! + 0!2!1! + 0!1!2! + 1!0!2! + 0!1!2! + 0!0!3! = (2 \cdot 3 - 1)!! = 15$$

и т.д.

Применим лемму 3.1 для оценки

$$U_n(x, y, v) = \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^{v_1} \left(L \int_{v_0}^{v_2} \dots \left(L \int_{v_0}^{v_{n-1}} \frac{L\psi dv_n}{h(x, y)} \right) \frac{dv_{n-1}}{h(x, y)} \dots \right) \frac{dv_2}{h(x, y)} \right) \frac{dv_1}{h(x, y)}. \quad (3.102)$$

Если раскрыть скобки в выражении

$$L \left(\frac{1}{h} L \left(\frac{1}{h} \dots L \left(\frac{1}{h} (L\psi) \right) \dots \right) \right) \quad (3.103)$$

и заменить производную порядка $|\alpha|$ от $\frac{1}{h}$ на $M_\gamma C^{|\alpha|}(|\alpha|!)$, а производную того же порядка от ψ на $N_\gamma C^{|\alpha|}(|\alpha|!)$, где M_γ , N_γ и C — некоторые положительные константы, определяемые голоморфными на множестве Π_γ функциями $\frac{1}{h}$ и ψ , то полученная сумма будет равна

$$M_\gamma^{n-1} N_\gamma C^n [(2n - 1)!!] (v + 1)^n. \quad (3.104)$$

Действительно, оценка производной зависит только от ее порядка и не зависит от того, по какой переменной и сколько раз производилось дифференцирование (лишь бы $\alpha_1 + \alpha_2 = |\alpha|$). В этом смысле можно

заменить x и y на одну переменную — обозначим ее через t . Но тогда оператор L превратится в оператор $\tilde{L} = (v+1)\frac{\partial}{\partial t}$, для которого уже верна лемма 3.1. В итоге имеем, $\forall (x, y) \in \Pi_\gamma$

$$|U_n(x, y, v)| \leq M_\gamma^{n-1} N_\gamma C^n [(2n-1)!!] \times \left| \int_{v_0}^v dv_1 \int_{v_0}^{v_1} dv_2 \dots \int_{v_0}^{v_{n-1}} (v+1)^n dv_n \right| \leq$$

$$\leq \frac{M_\gamma^{n-1} N_\gamma [(2n-1)!!] |v-v_0|^n (|v|+1)^n C^n}{n!}. \quad (3.105)$$

Заметим, что $M_\gamma \rightarrow \infty$ при $\gamma \rightarrow +0$, поскольку неограниченно возрастает максимум модуля $\frac{1}{h(x, y)}$ на множестве Π_γ , когда $\Pi_\gamma \rightarrow \Pi$. Из оценки (3.105) следует сходимость ряда (3.97) равномерно на множестве $\tilde{\Pi}_{\gamma\delta} = \Pi_\gamma \times \{v : |v-v_0| \leq v\}$, где δ — произвольное фиксированное положительное число в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$. Итак, интеграл системы (3.94), определяемый формулой (3.99), представляет собой голоморфную в точке $\varepsilon = 0$ функцию. С другой стороны, эта формула задает линейное (при каждом ε из указанной выше окрестности точки $\varepsilon = 0$) отображение A_h^ε алгебры $\mathcal{A}(\Pi)$ функций двух переменных (x, y) , голоморфных на прямоугольнике Π , в алгебру $\mathcal{U}(\tilde{\Pi}_{\gamma\delta})$ функций трех переменных (x, y, v) , голоморфных на множестве $\tilde{\Pi}_{\gamma\delta}$.

Обозначим через $U^{[1]}(x, y, v, \varepsilon) = (A_h^\varepsilon x)(x, y, v)$ и $U^{[2]}(x, y, v, \varepsilon) = (A_h^\varepsilon y)(x, y, v)$ — два независимых интеграла системы (3.94), являющихся образами соответственно элементов x и y алгебры $\mathcal{A}(\Pi)$ (независимость интегралов очевидна). Пусть $\psi(x, y) \in \mathcal{A}(\Pi)$, тогда, в соответствии с общей теорией систем дифференциальных уравнений, существует дифференцируемая функция Ψ двух переменных такая, что

$$(A_h^\varepsilon \psi)(x, y, v) = \Psi((A_h^\varepsilon x)(x, y, v), (A_h^\varepsilon y)(x, y, v)). \quad (3.106)$$

Положим в равенстве (3.106) $v = v_0$:

$$\psi(x, y) = \Psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Pi_\gamma. \quad (3.107)$$

Следовательно, равенство (3.106) примет вид коммутационного соотношения:

$$(A_h^\varepsilon \psi)(x, y, v) = \psi((A_h^\varepsilon x)(x, y, v), (A_h^\varepsilon y)(x, y, v)). \quad (3.108)$$

С помощью (3.108) докажем, что A_h^ε — семейство голоморфных в точке $\varepsilon = 0$ гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}(\Pi)$ в алгебру $\mathcal{U}(\tilde{\Pi}_{\gamma\delta})$. Действительно, пусть $\alpha(x, y), \beta(x, y) \in \mathcal{A}(\Pi)$. Тогда,

$$\begin{aligned} (A_h^\varepsilon(\alpha(x, y)\beta(x, y)))(x, y, v) &= (A_h^\varepsilon((\alpha\beta)(x, y)))(x, y, v) = \\ &= (\alpha\beta)((A_h^\varepsilon x)(x, y, v), (A_h^\varepsilon y)(x, y, v)) = \\ &= \alpha((A_h^\varepsilon x)(x, y, v), (A_h^\varepsilon y)(x, y, v)) \beta((A_h^\varepsilon x)(x, y, v), (A_h^\varepsilon y)(x, y, v)) = \\ &= (A_h^\varepsilon \alpha)(x, y, v)(A_h^\varepsilon \beta)(x, y, v), \end{aligned}$$

и утверждение доказано.

Для того, чтобы сформулировать теорему о предельном переходе, рассмотрим первый интеграл $U^{[1]}(x, y, v, \varepsilon) = 0$ или, в развернутом виде,

$$x - \sigma = \varepsilon \left(\frac{v - v_0}{h(x, y)} + \frac{\varepsilon \left(h'_x \frac{(v-v_0)^2}{2} + h'_y \frac{(v-v_0)^3}{3} \right)}{h^3(x, y)} + \dots \right), \quad (3.109)$$

который при каждом фиксированном $\sigma \in [0, 1]$ определяет решения системы (3.94) такие, что $v(\sigma, \varepsilon) = v_0$.

Далее, будем говорить что решение $y(x, \varepsilon)$ уравнения (3.92) принадлежит классу $V_h[0, 1]$, если оно существует на отрезке $[0, 1]$ и выполнены следующие два условия:

- 1°. $\forall \sigma \in (0, 1/2) \exists M_\sigma > 0: \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \forall x \in [\sigma, 1 - \sigma] |y'(x, \varepsilon)| \leq M_\sigma;$
- 2°. $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ кривая $\Gamma_\varepsilon = \{(x, y(x, \varepsilon)); x \in [0, 1]\}$ принадлежит Π .

Отсюда видно, что если $y(x, \varepsilon) \in V_h[0, 1]$, то $v(x, \varepsilon) = y'(x, \varepsilon)$ является ограниченной на отрезке $[\sigma, 1 - \sigma]$ функцией, при этом константа M_σ не зависит от ε .

Поэтому, правая часть (3.109), которую мы обозначим через $W^{[1]}(x, y, v, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ также будет стремиться к нулю равномерно на множестве $\tilde{\Pi}_{\gamma\delta}$ при фиксированных $\gamma >$ и $\delta > 0$, определяемых константой M_σ из условия 1°.

Теорема 3.5 (о предельном переходе). *Если $y(x, \varepsilon) \in V_h[0, 1]$, то имеет место предельный переход*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, \varepsilon) = \varphi(x) \quad \forall x \in (0, 1). \quad (3.110)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $y(x, \varepsilon)$ — решение (3.92) из класса $V_h[0, 1]$. Предположим противное, т.е. для некоторого $x \in (0, 1)$ предел (3.110) не имеет места, и выберем $\sigma \in (0, 1/2)$ так, чтобы $x \in (\sigma, 1 - \sigma)$. Это означает, что существуют последовательность $\varepsilon_p \rightarrow 0$ и константа $\gamma_1 > 0$ такие, что $|y_p - \varphi(x)| > \gamma_1$, где $y_p = y(x, \varepsilon_p)$. Но тогда найдется положительная константа γ_2 , для которой будет выполнено неравенство $|h(x, y_p)| > \gamma_2$, при всех $p = 1, 2, \dots$, из которого следует, что $(x, y_p) \in \Pi_{\gamma_2}$. По предыдущему, $W^{[1]}(x, y, v, \varepsilon_p) \rightarrow 0$, при $p \rightarrow \infty$, равномерно на $\tilde{\Pi}_{\gamma\delta}$, а, с другой стороны, $W^{[1]}(x, y(x, \varepsilon_p), v(x, \varepsilon_p), \varepsilon_p) = x - \sigma$, поскольку $y(x, \varepsilon)$ — решение уравнения (3.92). Отсюда следует, что $x = \sigma$, а это противоречит выбору σ . Теорема доказана.

Пример 3.3. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= (y - \varphi(x))^{2k+1}; \quad k \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon > 0; \\ y(0, \varepsilon) &= y(1, \varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Разрешимость задачи (3.111) следует как из теоремы об обратной функции в банаховом пространстве, так и из принципа Шаудера [64, 86]. Наложим на функцию $\varphi(x)$ следующие условия:

- 1) $\varphi(x)$ — вещественно-голоморфная на отрезке $[0, 1]$ функция;
- 2) $\varphi''(x) < 0 \quad \forall x \in [0, 1]$;
- 3) $\varphi(0) \geq 0, \quad \varphi(1) \geq 0$.

Лемма 3.2. При выполнении условий 1)–3) решение задачи (3.111) удовлетворяет неравенству $0 \leq y(x, \varepsilon) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in [0, 1] \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. При этом, интегральная кривая $\Gamma_\varepsilon: y = y(x, \varepsilon)$ является выпуклой на рассматриваемом отрезке.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть это не так. Тогда существует дуга l_ε кривой Γ_ε , лежащая выше кривой $\Gamma: y = \varphi(x)$ и пересекающая ее (в силу краевых условий и условия 3) леммы) в двух точках T_1 и T_2 с абсциссами x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) соответственно. Как следует из уравнения (3.111), дуга l_ε является вогнутой на отрезке $[x_1, x_2]$, а, значит, лежит ниже хорды $T_1 T_2$. Но, в соответствии с условием 2), дуга кривой Γ , с концами в точках T_1 и T_2 , является выпуклой и поэтому лежит выше хорды $T_1 T_2$, а

это противоречит предположению, что l_ε находится выше кривой Γ . Ну а то, что кривая Γ_ε выпукла на отрезке $[0, 1]$ (при каждом $\varepsilon > 0$), следует из самого уравнения. Лемма доказана.

Следующая лемма, необходимая для дальнейшего, носит элементарный характер, и доказывается с помощью простейших геометрических рассуждений.

Лемма 3.3. *Если $\psi(x) \geq 0$ и $\psi''(x) < 0 \ \forall x \in [0, 1]$, то для любого $\sigma \in (0, 1/2)$ на отрезке $[\sigma, 1 - \sigma]$ выполняется неравенство*

$$|\psi'(x)| < \frac{R}{\sigma},$$

где $R = \max_{x \in [0, 1]} \psi(x)$.

Вернемся к краевой задаче (3.111). Из леммы 3.2 следует, что интегральная кривая $\Gamma_\varepsilon: y = y(x, \varepsilon)$ является выпуклой, находится ниже кривой $\Gamma: y = \varphi(x)$ и выше оси абсцисс при каждом $\varepsilon > 0$. Значит,

$$\max_{x \in [0, 1]} y(x, \varepsilon) \leq R_1,$$

где $R_1 = \max_{x \in [0, 1]} \varphi(x)$, и поэтому к уравнению $y(x, \varepsilon)$ можно применить лемму 3.3:

$$|y'(x, \varepsilon)| \leq \frac{R_1}{\sigma} \quad \forall x \in [\sigma, 1 - \sigma] \quad \forall \varepsilon > 0,$$

т.е. $y(x, \varepsilon) \in V_h[0, 1]$. Таким образом, в соответствии с предельной теоремой 3.5

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = \varphi(x) \quad \forall x \in (0, 1). \quad (3.112)$$

Замечание к примеру 3.3. Уравнение (3.111) встречается в химической кинетике и условие принадлежности его решения классу $V_h[0, 1]$ является естественным.

В следующем примере изменится направление выпуклости.

Пример 3.4. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = (y - \varphi(x))^{2k+1}; \quad k \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon > 0; \quad (3.113)$$

$$y'(0, \varepsilon) = 0, \quad y(1, \varepsilon) = \varphi(1).$$

Для доказательства предельного перехода нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 3.4. Если $\varphi'(0) = 0$ и $\varphi''(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$, то кривая $\Gamma_\varepsilon : y = y(x, \varepsilon)$ решения краевой задачи (3.113) является вогнутой и расположена выше кривой $\Gamma : y = \varphi(x)$.

Доказательство. Вначале докажем, что $y(0, \varepsilon)$ не может быть меньше $\varphi(0)$. Предположим противное, тогда $y(x, \varepsilon) < \varphi(x) \quad \forall x \in [0, \delta]$ (δ — некоторое малое положительное число) по теореме о сохранении знака непрерывной функции. Так как $y'(0, \varepsilon) = 0$ и $y''(x, \varepsilon) < 0$ на отрезке $[0, \delta]$, то $y'(x, \varepsilon) < 0 \quad \forall x \in [0, \delta]$ и, значит, функция $y(x, \varepsilon)$ там убывает. В соответствии со вторым краевым условием, в некоторой точке $x_0 \in (0, \delta)$ должен начаться рост функции $y(x, \varepsilon)$, т.е. x_0 — точка минимума этой функции. При этом, $y(x, \varepsilon) - \varphi(x) < 0$ при всех x из некоторой окрестности этой точки, поскольку кривая Γ вогнутая и растущая. Но тогда из уравнения (3.113) следует, что $y''(x, \varepsilon) < 0$ в указанной окрестности, а это противоречит тому, что x_0 — точка минимума. Значит, $y(0, \varepsilon) \geq \varphi(0)$. Докажем теперь справедливость утверждения для произвольного $x \in (0, 1)$. Снова предположим противное, т.е. $\exists x_1 \in (0, 1) : y(x_1, \varepsilon) < \varphi(x_1)$. Но тогда кривая Γ_ε пересекает кривую Γ в некоторой точке с абсциссой x_2 , причем точка пересечения является точкой перегиба кривой Γ_ε . Это означает, что дуга кривой Γ_ε , соответствующая отрезку $[x_2, 1]$, ввиду ее выпуклости, целиком лежит под касательной к этой кривой к этой кривой, что делает невозможным выполнение второго краевого условия, поскольку кривая Γ является вогнутой и растущей. Лемма доказана.

Лемма 3.5. Пусть функция $\psi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\psi'(0) = 0, \quad \psi(1) = m;$
- 2) $\psi''(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1].$

Тогда, для любого σ такого, что $0 < \sigma < 1$ выполняется неравенство

$$0 \leq \psi'(x) < \frac{m}{\sigma} \quad \forall x \in [0, 1 - \sigma].$$

Доказательство элементарно и вытекает из простейших геометрических рассуждений. Главным в лемме является то, что оценка не зависит от $\psi(x)$ при условии, что $\psi(1)$ фиксировано.

Сформулируем и докажем предельную теорему для краевой задачи (3.113).

Теорема 3.6. *Если функция $\varphi(x)$ вещественно-голоморфна на отрезке $[0, 1]$ и для нее выполнены условия 1) и 2) леммы 3.5, то имеет место предельный переход*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = \varphi(x) \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.114)$$

Доказательство. Существование решения $y(x, \varepsilon)$ рассматриваемой краевой задачи обосновывается так же как и в предыдущем примере [64, 86]. Далее, рассмотрим первый интеграл $U^{[1]}(x, y, v, \varepsilon) = 0$ или, в развернутом виде

$$U^{[1]}(x, y, v, \varepsilon) = x - \varepsilon \left(\frac{v}{(y - \varphi(x))^{2k+1}} + \frac{\varepsilon(2k+1) \left(-\varphi' \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} \right)}{(y - \varphi(x))^{4k+3}} + \dots \right) = 0. \quad (3.115)$$

Фиксируем $x \in (0, 1)$ и предположим противное, т.е. $y(x, \varepsilon_p) - \varphi(x) > \gamma > 0$ на некоторой последовательности $\varepsilon_p \rightarrow 0$. По лемме 3.5, $0 \leq v = v(x, \varepsilon) = y'(x, \varepsilon) < \frac{\varphi(1)}{1-x}$, при каждом ε_p (т.е. v ограничена), поэтому

$$\lim_{\varepsilon_p \rightarrow 0} U^{[1]}(x, y, v, \varepsilon_p) = x,$$

ввиду ограниченности выражения в скобках. С другой стороны, $U^{[1]}(x, y(x, \varepsilon_p), v(x, \varepsilon_p), \varepsilon_p) = 0$, поскольку $U^{[1]}(x, y, v, \varepsilon) = 0$ — первый интеграл системы, соответствующей уравнению (3.113). Значит $x = 0$, а это противоречит выбору x . Далее, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(1, \varepsilon) = \varphi(1)$, так как $y(1, \varepsilon) = \varphi(1)$. Наконец, докажем, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(0, \varepsilon) = \varphi(0)$. Пусть это не так, т.е. существует последовательность $\varepsilon_r \rightarrow 0$ такая, что $y(0, \varepsilon_r) > \varphi(0) + \alpha$ ($\alpha > 0$ и не зависит от ε_r). Возьмем точку $x = \delta_0$, близкую к нулю. По ранее доказанному,

$$\lim_{\varepsilon_r \rightarrow +0} (y(\delta_0, \varepsilon_r) - \varphi(\delta_0)) = 0.$$

Это означает, что при некоторых ε_r выполняется неравенство $y(\delta_0, \varepsilon_r) < y(0, \varepsilon_r)$, так как обе кривые вогнутые. Значит, на отрезке $[0, \delta_0]$ функция $y(x, \varepsilon)$ убывает, а это противоречит тому, что $y'(0, \varepsilon) = 0$ и $y''(x, \varepsilon) > 0$. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = \varphi(x) \quad \forall x \in [0, 1],$$

и теорема доказана.

Заметим, что в вышеизложенных предельных теоремах, речь идет о поточечной сходимости.

Замечание к примеру 3.4. В случае, когда $\varphi(x) \equiv 0$, интегралы $U^{[1]}$ и $U^{[2]}$ для краевой задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' &= y^n, \quad n = 2, 3, \dots; \\ y'(0, \varepsilon) &= 0, \quad y(1, \varepsilon) = m > 0 \end{aligned} \quad (3.116)$$

записываются в явном виде:

$$\begin{aligned} U^{[1]} &= x - \frac{v\varepsilon}{y^n} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{2k-1} n(2n+1)(3n+2) \dots ((k-1)n+k-2)}{(2k-1)!! y^{kn+k-1}} \varepsilon^k, \\ U^{[2]} &= y - \frac{v^2 \varepsilon}{2y^n} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{2k} n(2n+1)(3n+2) \dots ((k-1)n+k-2)}{(2k)!! y^{kn+k-1}} \varepsilon^k. \end{aligned} \quad (3.117)$$

При фиксированном ε оба ряда сходятся в области $G_\varepsilon = \{(y, v) : |y| > \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{2}} (|v\varepsilon|^{\frac{2}{n+1}})\}$ фазовой плоскости vOy . Ясно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$, граница области G_ε прижимается к оси Ov , так как $\frac{2}{n+1} < 1$. Но тогда и фазовые траектории системы, соответствующей задаче (3.116), близкие к границе, прижимаются к оси Ov , т.е. $y(x, \varepsilon)$, ввиду ограниченности v (см. лемму 3.5) стремится к нулю при каждом $x \in [0, 1)$.

Замечание к примерам 3.3 и 3.4. Рассмотренные примеры описывают одномерный кинетический процесс. Рассмотрим двумерный случай. А именно, пусть в ограниченной выпуклой области $G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей, задана краевая задача

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} &= (u - \varphi(x, y))^{2k+1}; \quad \varepsilon > 0, \quad k \in \mathbb{N}; \\ u \Big|_{\partial G} &= 0, \end{aligned} \quad (3.118)$$

где l — направление кинетического процесса, определяемого единичным вектором $\bar{l}_0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$, а $\varphi(x, y)$ — неотрицательная вещественно-голоморфная на $G \cup \partial G$ функция, такая, что $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2} > 0$.

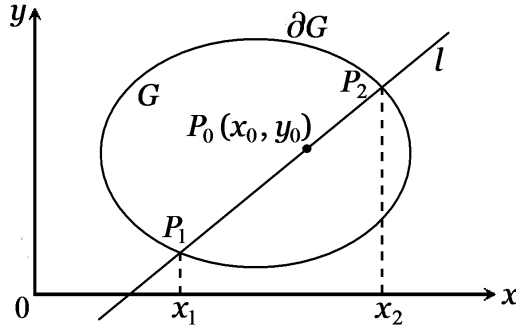


Рис. 3.1

Выберем произвольно точку $P_0(x_0, y_0) \in G$ и проведем через нее прямую l . Пусть она пересекает границу ∂G в точках P_1 и P_2 , с абсциссами x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) (см. рис. 3.1), так как область G является выпуклой, то отрезок с концами в этих точках целиком принадлежит этой области. Ясно, что отрезок P_1P_2 задается уравнением $y = x + b$, где $b = y_0 - x_0$ и $x \in [x_1, x_2]$. Пусть функция $w(x) = u(x, y) \Big|_{P_1P_2} \equiv u(x, x + a)$.

Очевидно, что

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Big|_{P_1P_2}. \quad (3.119)$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \forall (x, y) \in G. \quad (3.120)$$

Сравнивая (3.119) и (3.120), приходим к выводу, что сужением краевой задачи (3.118) на отрезок P_1P_2 будет краевая задача на отрезке $[x_1, x_2]$ для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2 w}{dx^2} &= (w - \varphi(x, x + a))^{2k+1}; \\ w(x, \varepsilon) &= w(x_2, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \quad (3.121)$$

в точности совпадающей с задачей (3.111). Более того, поскольку $\frac{d^2 \varphi(x, x + a)}{dx^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2}$, в соответствии с равенством (3.120), то выполнены

условия 1)–3), налагаемые на функцию $\varphi(x)$ примера 3.3 (см. с. 132). Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} w(x, \varepsilon) = \varphi(x, x + a) \quad \forall x \in [x_1, x_2],$$

а, ввиду произвольности выбора точки P_0 в области G ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u(x, y, \varepsilon) = \varphi(x, y) \quad \forall (x, y) \in G. \quad (3.122)$$

Рассуждая таким же образом, можно доказать предельный переход и в трехмерном случае для направленного кинетического процесса.

§ 3.6. О голоморфной регуляризации краевых задач

В отличие от решений начальных задач для уравнений высших порядков, правые части которых удовлетворяют условиям теоремы Пуанкаре о разложении, решения краевых задач с такими же правыми частями будут голоморфными по параметру только при специальных условиях. Приведем известный пример [86] существования решения краевой задачи, голоморфным образом зависящего от малого параметра.

Рассмотрим краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром ε :

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y', \varepsilon), \quad 0 < x < 1, \\ y(0, \varepsilon) &= \varphi_0(\varepsilon), \quad y(1, \varepsilon) = \varphi_1(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.123)$$

Предположим, что функция $f(x, y, v, \varepsilon)$ голоморфна по совокупности переменных при

$$x \in [0, 1], \quad -\infty < y, v < +\infty, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0,$$

а функции $\varphi_0(\varepsilon)$ и $\varphi_1(\varepsilon)$ голоморфны в точке $\varepsilon = 0$.

Пусть при $\varepsilon = 0$ задача (3.123), т.е. задача

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y', \varepsilon), \\ y(0) &= \varphi_0(0), \quad y(1) = \varphi_1(0) \end{aligned} \quad (3.124)$$

имеет решение $y = y_0(x)$ (по поводу разрешимости краевых задач см. далее).

Теперь предположим, что линеаризованная задача

$$u'' - f_y(x, y_0(x), y'_0(x), 0)u - f_v(x, y_0(x), y'_0(x), 0)u' = 0,$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

имеет только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.

В этих условиях, задачу (3.123) можно записать в операторном виде:

$$F(y, \varepsilon) = 0.$$

При этом, оператор F действует из $C^2[0, 1] + \mathbb{R}$ в $C[0, 1] + \mathbb{R} + \mathbb{R}$ по следующему закону: каждой паре $\{y(x), \varepsilon\}$ ставится в соответствие тройка

$$\{y''(x) - f(x, y, y', \varepsilon), y(0), y(1)\}.$$

Операторы $F(y, \varepsilon)$ и $F_y(y, \varepsilon)$ являются голоморфными, причем оператор $F_y(y_0, 0)$ непрерывно обратим. По теореме о неявном операторе в голоморфном случае [86], задача (3.123) имеет при достаточно малых ε единственное решение $y(x, \varepsilon) \in C^2[0, 1]$, в окрестности решения задачи (3.124), голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ равномерно по $x \in [0, 1]$ и может быть найдено методом малого параметра [85, 86].

Следующий простейший пример показывает, что решение краевой задачи для линейного уравнения второго порядка, в которое ε входит целым образом, имеет полюс в точке $\varepsilon = 0$.

Действительно, функция

$$y(x, \varepsilon) = \frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon} + \frac{1 + \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} \cos \varepsilon x + \frac{1}{\varepsilon^2}$$

является решением краевой задачи

$$y'' = 1 - \varepsilon^2 y, \quad y'(0, \varepsilon) = 1, \quad y'(1, \varepsilon) = -1.$$

Гораздо более сложной является ситуация с сингулярно возмущенными краевыми задачами. Здесь, как мы увидим в дальнейшем,

даже интегралы, определяющие решения таких задач, оказываются неголоморфными в точке $\varepsilon = 0$. Парадоксальность ситуации заключается также и в том, что такие краевые задачи могут иметь целые по ε (правда, разрывные по x) решения. В самом деле, нетрудно видеть, что функция $y(x, \varepsilon) = -2\pi\varepsilon \operatorname{tg} \pi x$ является решением задачи

$$\varepsilon y'' = -yy', \quad y(0, \varepsilon) = y(1, \varepsilon) = 0,$$

и имеет разрыв второго рода в точке $x = 1/2$.

Прежде всего, напомним основные положения теории дифференциальных неравенств, развитой в работах С.А. Чаплыгина [58] и М. Нагумо [59, 95], как основы доказательства существования решений краевых задач.

Рассмотрим общую краевую задачу

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \quad 0 < x < 1, \\ p_1 y(0) - p_2 y'(0) &= a, \quad q_1 y(1) + q_2 y'(1) = b, \\ p_2 &\geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad p_1^2 + p_2^2 > 0, \quad q_1^2 + q_2^2 > 0. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Пусть функция $f(x, y, v)$ непрерывна на множестве $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ и выполнено условие Нагумо [95]:

$$f(x, y, y') = O(|y'|^2) \quad \text{при} \quad |y'| \rightarrow \infty, \quad (3.126)$$

т.е. для всех (x, y) , принадлежащих компактному подмножеству полосы $[0, 1] \times \mathbb{R}$,

$$f(x, y, v) = O(|v|^2) \quad \text{при} \quad |v| \rightarrow \infty.$$

Заметим, что условие Нагумо гарантирует ограниченность $y'(x)$ на некотором подмножестве отрезка $[0, 1]$ или даже на всем отрезке.

Все это назовем *условием I*. Тогда, если существуют барьерные функции $\alpha(x), \beta(x) \in C^2[0, 1]$ такие, что

$$\begin{aligned} \alpha(x) &\leq \beta(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ p_1 \alpha(0) - p_2 \alpha'(0) &\leq a \leq p_1 \beta(0) - p_2 \beta'(0), \\ q_1 \alpha(1) + q_2 \alpha'(1) &\leq b \leq q_1 \beta(1) + q_2 \beta'(1), \\ \alpha'' &\geq f(x, \alpha, \alpha'), \quad \beta'' \leq f(x, \beta, \beta'), \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (3.127)$$

то задача (3.125) имеет решение $y = y(x) \in C^2[0, 1]$ и удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha(x) \leq y(x) \leq \beta(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.128)$$

В дополнение, приведем геометрическое условие существования решения краевой задачи

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \\ y'(0) &= 0, \quad y(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Для этого сведем задачу (3.129) к краевой задаче для системы

$$\begin{cases} y' = v, \\ v' = f(x, y, v), \quad 0 < x < 1, \\ v(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases} \quad (3.130)$$

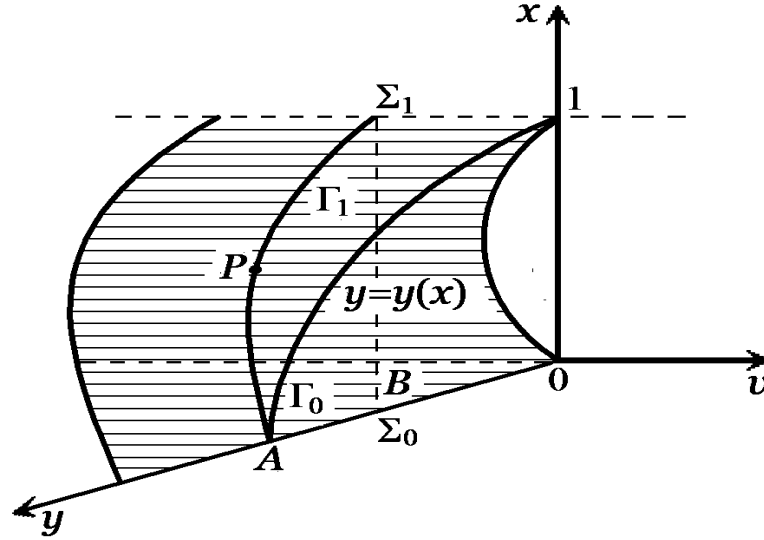


Рис. 3.2

Пусть Σ_0 — интегральная поверхность, состоящая из кривых (см. рис. 3.2), представляющих решения задач Коши с начальными условиями

$$\begin{aligned} y(0) &= A, \quad -\infty < A < +\infty, \\ v(0) &= 0, \end{aligned}$$

а Σ_1 — поверхность, состоящая из интегральных кривых решений задач Коши для этой системы, с начальными условиями

$$\begin{aligned} y(1) &= 0, \\ v(1) &= B, \quad -\infty < B < +\infty. \end{aligned}$$

Имеет место следующее очевидное утверждение.

Лемма 3.6. *Для того чтобы краевая задача (3.130) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset.$$

Действительно, если Γ — кривая решения этой задачи, то, заведомо, ее часть (или она вся), проходящая через точку $(0, A, 0)$, принадлежит Σ_0 , а другая часть, проходящая через точку $(1, B, 0)$, принадлежит Σ_1 . Наоборот, если $\Gamma_0 \subset \Sigma_0$, $\Gamma_1 \subset \Sigma_1$ и $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = P$, то $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ — интегральная кривая системы (3.130). При этом, проекция кривой Γ на плоскость xOy дает интегральную кривую $y = y(x)$ задачи (3.129).

Перейдем к сингулярно возмущенным задачам. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' &= f(x, y, y'), \quad 0 < x < 1, \\ y'(0, \varepsilon) &= y(1, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \tag{3.131}$$

$$(a = b = 0, \quad p_1 = q_2 = 0, \quad p_2 = q_1 = 1).$$

Следуя книге [95], сформулируем и докажем лемму о существовании решения задачи (3.131).

Лемма 3.7. *Пусть выполнено условие I и существует положительная константа m такая, что*

$$f_y(x, y, 0) \geq m > 0 \quad \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \quad (\text{условие II}).$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ задача (3.131) имеет решение $y(x, \varepsilon) \in C^2[0, 1]$, удовлетворяющее оценке

$$|y(x, \varepsilon)| \leq \frac{M}{m}, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{3.132}$$

где

$$M = \max_{x \in [0, 1]} f(x, 0, 0).$$

Доказательство. Определим для $x \in [0, 1]$ барьерные функции

$$\alpha(x) = -\frac{M}{m}, \quad \beta(x) = \frac{M}{m}.$$

Ясно, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\alpha(x) &\leq \beta(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ -\alpha'(0) &\leq 0 \leq -\beta'(0), \\ \alpha(1) &\leq 0 \leq \beta(1).\end{aligned}$$

Чтобы получить дифференциальные неравенства

$$\varepsilon\alpha'' \geq f(x, \alpha, \alpha'), \quad \varepsilon\beta'' \leq f(x, \beta, \beta'), \quad 0 < x < 1,$$

заметим, что по формуле Тейлора

$$f(x, \alpha, 0) = f(x, 0, 0) + f_y(x, \xi, 0)\alpha,$$

где $\xi \in (\alpha, 0)$, и поэтому

$$f(x, \alpha, 0) \leq |f(x, 0, 0)| + m\alpha \leq M + m\left(-\frac{M}{m}\right) = 0 = \varepsilon\alpha''.$$

Аналогично, для некоторой промежуточной точки $\eta \in (0, \beta)$

$$f(x, \beta, 0) = f(x, 0, 0) + f_y(x, \eta, 0)\beta \geq -M + m\left(\frac{M}{m}\right) = 0 = \varepsilon\beta''.$$

Из метода дифференциальных неравенств следует, что для любого положительного ε задача (3.131) имеет решение $y(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам

$$-\frac{M}{m} \leq y(x, \varepsilon) \leq \frac{M}{m}. \quad (3.133)$$

Лемма полностью доказана.

Для того чтобы подойти к задаче (3.131) с точки зрения метода голоморфной регуляризации предположим, что функция $f(x, y, v)$ является целой по (y, v) и голоморфной по $x \in [0, 1]$ (следовательно, по теореме Гартогса, она голоморфна на множестве $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$) и, для производной решения, выполняется неравенство

$$k_1 \leq y'(x, \varepsilon) \leq k_2 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

причем $k_1 < 0$. Пусть это будет *условие III*.

Далее, обозначим через

$$\Pi_{xyv} = [0, 1] \times \left\{ y : -\frac{M}{m} \leq y \leq \frac{M}{m} \right\} \times \{v : k_1 \leq v \leq k_2\}$$

— прямоугольный параллелепипед в пространстве O_{xyv} . Перейдем от задачи (3.131) к краевой задаче для системы

$$\begin{cases} y' = v, \\ \varepsilon v' = f(x, y, v), \quad v(0, \varepsilon) = y(1, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (3.134)$$

Очевидно, что параллелепипед Π_{xyv} содержит интегральную кривую этой системы.

Для построения голоморфных в точке $\varepsilon = 0$ интегралов системы (3.134) предположим, что

$$f(x, y, v) < 0 \quad \forall (x, y, v) \in \Pi_{xyv} \quad (\text{условие IV}).$$

Имеем, для произвольной функции $\varphi(x, y)$, голоморфной на прямоугольнике

$$\Pi_{xy} = [0, 1] \times \left\{ y : -\frac{M}{m} \leq y \leq \frac{M}{m} \right\},$$

интеграл системы (3.134) в рассматриваемом параллелепипеде:

$$\begin{aligned} U(x, y, v, \varepsilon) = & \varphi(x, y) - \varepsilon \int_0^v \frac{L \varphi dv_1}{f(x, y, v_1)} + \\ & + \varepsilon^2 \int_0^v \left(L \int_0^{v_1} \frac{L \varphi dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} - \dots, \end{aligned} \quad (3.135)$$

где $L = \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$.

Сходимость этого ряда в некоторой окрестности $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ равномерно на Π_{xyv} доказывается так же как и в § 3.5. Заметим, что как следует из оценки (3.105), ε_1 не зависит от φ .

Чтобы построить два независимых на Π_{xyv} интеграла системы (3.134), выберем двумя способами $\varphi(x, y)$:

1) $\varphi(x, y) = \varphi(x)$ — голоморфной на $[0, 1]$ функции такой, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(x) < 0 \quad \forall x \in [0, 1]$;

2) $\varphi(x, y) = y - y_0$, где произвольное $y_0 \in \left[-\frac{M}{m}, \frac{M}{m}\right]$. Итак,

$$U^{[1]}(x, y, v, \varepsilon) = \varphi(x) - \varepsilon \varphi'(x) \int_0^v \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} + \\ + \varepsilon^2 \int_0^v \left(L \int_0^{v_1} \frac{\varphi'(x) dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} - \dots, \quad (3.136)$$

$$U^{[2]}(x, y, v, \varepsilon) = y - y_0 - \varepsilon \int_0^v \frac{v_1 dv_1}{f(x, y, v_1)} + \\ + \varepsilon^2 \int_0^v \left(L \int_0^{v_1} \frac{v_2 dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} - \dots, \quad (3.137)$$

— независимые на параллелепипеде Π_{xyv} интегралы системы (3.134).

Первые интегралы

$$\begin{cases} U^{[1]}(x, y, v, \varepsilon) = 0, \\ U^{[2]}(x, y, v, \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (3.138)$$

задают решение $(y(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon))$ задачи (3.134), причем $y_0 = y(0, \varepsilon)$ определяется вторым краевым условием. Покажем, как это делается. Сначала рассматривается уравнение

$$e^{\tilde{U}^{[1]}(1, 0, v(1, \varepsilon), \varepsilon)} = e^{\frac{\varphi(1)}{\varepsilon}}, \quad (3.139)$$

где

$$\tilde{U}^{[1]}(x, y, v, \varepsilon) = \varphi'(x) \int_0^v \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} - \varepsilon \int_0^v \left(L \int_0^{v_1} \frac{\varphi'(x) dv_2}{f(x, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)} + \dots, \quad (3.140)$$

для определения $v(1, \varepsilon)$ с помощью теоремы о неявной функции.

Затем определяется собственно y_0 из уравнения

$$U^{[2]}(1, 0, v(1, \varepsilon), \varepsilon) = 0. \quad (3.141)$$

Как раз из-за того, что $y(0, \varepsilon)$ неголоморфна в точке $\varepsilon = 0$, мы и говорили в самом начале, что интегралы, соответствующие краевым задачам, могут оказаться неголоморфными в точке $\varepsilon = 0$.

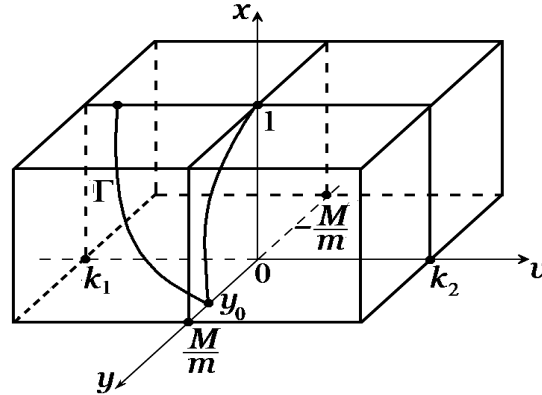


Рис. 3.3

Рис. 3.3 иллюстрирует вышесказанное. Здесь дуга Γ интегральной кривой системы (3.134) начинается на оси Oy в точке y_0 и заканчивается на прямой, проходящей через точку $x = 1$ параллельно оси Ov . При этом, проекция кривой Γ на координатную плоскость xOy является кривой решения $y = y(x, \varepsilon)$ краевой задачи (3.131).

Глобальная псевдоголоморфность решения $y(x, \varepsilon)$ этой краевой задачи доказывается так же как и в § 3.3.

Таким образом, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 3.7. Если для функции $f(x, y, v)$ выполнены условия I–IV, существует голоморфная на отрезке $[0, 1]$ функция $\varphi(x)$ такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x) < 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ и уравнение

$$\varphi'(x) \int_0^v \frac{dv_1}{f(x, y_0, v_1)} = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \quad (3.142)$$

при каждом $y_0 \in \left[-\frac{M}{m}, \frac{M}{m}\right]$ имеет при $\varepsilon \rightarrow +0$ равномерно ограниченное на отрезке $[0, 1]$ решение $v = V_0\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, y_0\right)$, то решение $y(x, \varepsilon)$ краевой задачи (3.131) является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$ в глобальном смысле.

В итоге, $y(x, \varepsilon)$ представимо в виде ряда (3.78), первые члены которого могут быть найдены по формулам (3.76), (3.77). А, поскольку, алгоритм построения этого ряда по степеням ε не зависит от того, начальная или краевая задача рассматривается, то данная ниже оценка аппроксимации точного решения $y(x, \varepsilon)$ его частичными суммами одинаково пригодна для задач двух типов.

Имеем следующую систему уравнений (ср. с формулой (2.84)):

$$\begin{cases} e^{\tilde{U}^{[1]}(x, y(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon), \varepsilon)} = e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}}, \\ e^{\tilde{U}^{[1]}(x, \tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0), \tilde{v}(x, \varepsilon, \varepsilon_0), \varepsilon)} = e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}}, \\ U^{[2]}(x, y(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon), \varepsilon) = 0, \\ U^{[2]}(x, \tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0), \tilde{v}(x, \varepsilon, \varepsilon_0), \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (3.143)$$

где ε_0 определяется равенством $\exp \frac{\varphi(1)}{\varepsilon_0} = q_0$, правая часть q_0 которого фигурирует в доказательстве теоремы 3.4 (см. с. 115).

Из системы (3.133) следует, что

$$\begin{cases} e^{\tilde{U}^{[1]}(x, y(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon), \varepsilon)} - e^{\tilde{U}^{[1]}(x, \tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0), \tilde{v}(x, \varepsilon, \varepsilon_0), \varepsilon)} = e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}}, \\ U^{[2]}(x, y(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon), \varepsilon) - U^{[2]}(x, \tilde{y}(x, \varepsilon, \varepsilon_0), \tilde{v}(x, \varepsilon, \varepsilon_0), \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (3.144)$$

или, опуская аргументы функций $y, v, \tilde{y}, \tilde{v}$:

$$\begin{cases} e^{\tilde{U}^{[1]}(x, y, v, \varepsilon)} - e^{\tilde{U}^{[1]}(x, y, \tilde{v}, \varepsilon)} + e^{\tilde{U}^{[1]}(x, y, \tilde{v}, \varepsilon)} - e^{\tilde{U}^{[1]}(x, \tilde{y}, \tilde{v}, \varepsilon)} = e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}}, \\ U^{[2]}(x, y, v, \varepsilon) - U^{[2]}(x, y, \tilde{v}, \varepsilon) + U^{[2]}(x, y, \tilde{v}, \varepsilon) - U^{[2]}(x, \tilde{y}, \tilde{v}, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (3.145)$$

Теперь применим к равенствам (3.145) формулу Лагранжа конечных приращений:

$$\begin{cases} e^{\tilde{U}^{[1]}(x, y, \hat{v}, \varepsilon)} \left[\frac{\varphi'(x)}{f(x, y, \hat{v})} + O(\varepsilon) \right] (v - \tilde{v}) + \\ + e^{\tilde{U}^{[1]}(x, \hat{y}, \hat{v}, \varepsilon)} \left[- \int_0^{\tilde{v}} \frac{\varphi'(x) f_y(x, \hat{y}, v_1) dv_1}{f^2(x, \hat{y}, v_1)} + O(\varepsilon) \right] (y - \tilde{y}) = e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}}, \\ \left[-\varepsilon \frac{\tilde{v}}{f(x, y, \tilde{v})} + O(\varepsilon^2) \right] (v - \tilde{v}) + [1 + O(\varepsilon)](y - \tilde{y}) = 0, \end{cases} \quad (3.146)$$

где $\widehat{y} \in (y, \widetilde{y})$ (или $\widehat{y} \in (\widetilde{y}, y)$); $\widehat{v}, \check{v} \in (v, \widetilde{v})$ (или $\widehat{v}, \check{v} \in (\widetilde{v}, v)$), $\varepsilon \rightarrow +0$ и разрешим получившуюся систему относительно $(v - \widetilde{v})$ и $(y - \widetilde{y})$:

$$v - \widetilde{v} = \frac{\left(e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}}\right) [1 + O(\varepsilon)]}{e^{\widetilde{U}^{[1]}(x, y, \widehat{v}, \varepsilon)} \left[\frac{\varphi'(x)}{f(x, y, \widehat{v})} + O(\varepsilon)\right]}, \quad (3.147)$$

$$y - \widetilde{y} = \frac{\varepsilon \left(e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} - e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon_0}}\right) \left[-\frac{\check{v}}{f(x, y, \check{v})} + O(\varepsilon)\right]}{e^{\widetilde{U}^{[1]}(x, y, \widehat{v}, \varepsilon)} \left[\frac{\varphi'(x)}{f(x, y, \widehat{v})} + O(\varepsilon)\right]}. \quad (3.148)$$

Здесь рассматриваются классы O при $\varepsilon, \varepsilon_0 \rightarrow 0$. Что же касается оценки точности аппроксимации $y(x, \varepsilon)$ и $v(1, \varepsilon)$ частичными суммами $\widetilde{y}_n(x, \varepsilon)$ и $\widetilde{v}_n(1, \varepsilon)$, то в связи с равенствами (3.147) и (3.148) дословно повторяются оценки (2.89).

Вывод: метод голоморфной регуляризации применим также и для решения краевых задач, однако специфика последних требует специального подхода.

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon y'' = y - y' - e^{-xy}, \quad (3.149)$$

$$y'(0, \varepsilon) = 0, \quad y(1, \varepsilon) = 0. \quad (3.150)$$

Нетрудно видеть, что функция $\alpha(x) \equiv 0$ на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет краевым условиям (3.150) и неравенству:

$$\varepsilon \alpha'' \geq \alpha - \alpha' - e^{-x\alpha}. \quad (3.151)$$

Далее, рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \beta'' = \beta - \beta' - 1 \quad (3.152)$$

с краевыми условиями

$$\beta'(0, \varepsilon) = \beta(1, \varepsilon) = 0. \quad (3.153)$$

Решение линейной краевой задачи (3.152), (3.153) легко находится и имеет вид:

$$\beta(x, \varepsilon) = \frac{\lambda_2(\varepsilon)e^{\lambda_1(\varepsilon)x}}{\lambda_1(\varepsilon)e^{\lambda_2(\varepsilon)} - \lambda_2(\varepsilon)e^{\lambda_1(\varepsilon)}} + \frac{\lambda_1(\varepsilon)e^{\lambda_2(\varepsilon)x}}{\lambda_2(\varepsilon)e^{\lambda_1(\varepsilon)} - \lambda_1(\varepsilon)e^{\lambda_2(\varepsilon)}} + 1, \quad (3.154)$$

где

$$\lambda_1(\varepsilon) = -\frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}, \quad \lambda_2(\varepsilon) = \frac{\sqrt{1 + 4\varepsilon} - 1}{2\varepsilon}.$$

Учитывая то, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} e^{\lambda_1(\varepsilon)x} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0, 1]; \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} e^{\lambda_2(\varepsilon)x} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ e^x, & x \in (0, 1]; \end{cases}$$

и

$$\beta'(x, \varepsilon) = \frac{e^{\lambda_2(\varepsilon)x} - e^{\lambda_1(\varepsilon)x}}{\varepsilon(\lambda_1(\varepsilon)e^{\lambda_2(\varepsilon)} - \lambda_2(\varepsilon)e^{\lambda_1(\varepsilon)})},$$

можно доказать следующие неравенства:

$$0 \leq \beta(x, \varepsilon) \leq 1, \quad -1 \leq \beta'(x, \varepsilon) \leq 0, \quad (3.155)$$

справедливые на всем отрезке $[0, 1]$ при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Наконец, имеет место неравенство

$$\varepsilon\beta'' = \beta - \beta' - 1 \leq \beta - \beta' - e^{-x\beta} \quad \forall x \in [0, 1], \quad (3.156)$$

так как $e^{-x\beta} - 1 \leq 0$ в соответствии с первым из неравенств (3.155).

Таким образом, $\alpha(x)$ и $\beta(x, \varepsilon)$ — барьерные функции для решения $y(x, \varepsilon)$ краевой задачи (1.149), (3.150) и, значит,

$$0 \leq y(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon) \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.157)$$

При этом,

$$-1 \leq \beta'(1, \varepsilon) \leq y'(1, \varepsilon) \leq 0, \quad (3.158)$$

где неравенство

$$\beta'(1, \varepsilon) \leq y'(1, \varepsilon) \quad (3.159)$$

вытекает из неравенства $\text{tg} < BCD \leq \text{tg} < ACD$, очевидным образом следующего из рис. 3.4.

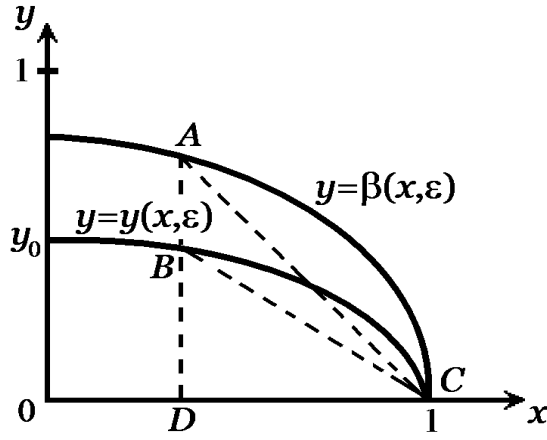


Рис. 3.4

Благодаря неравенству (3.158) и неравенству $y'(1, \varepsilon) \leq y'(x, \varepsilon) \leq 0$, справедливому при всех $x \in [0, 1]$ ввиду выпуклости кривой $y = y(x, \varepsilon)$, выполнено условие III ограниченности $v(x, \varepsilon) = y'(x, \varepsilon)$ и, в конечном итоге, выполнены условия теоремы 3.7. Тогда, следуя методу голоморфной регуляризации, имеем независимые интегралы системы уравнений, эквивалентной данному уравнению:

$$\begin{aligned} U^{[1]}(x, y, v, \varepsilon) &= \varphi(x) - \varepsilon \varphi'(x) \int_0^v \frac{dv_1}{y - v_1 - e^{-xy}} + O(\varepsilon^2), \\ U^{[2]}(x, y, v, \varepsilon) &= y - y_0 - \varepsilon \int_0^v \frac{v_1 dv_1}{y - v_1 - e^{-xy}} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.160)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Запишем соответствующую рассматриваемой краевой задаче систему первых интегралов:

$$\begin{cases} \frac{\varphi(x)}{\varepsilon \varphi'(x)} = \int_0^v \frac{dv_1}{y - v_1 - e^{-xy}} + O(\varepsilon), \\ y = y_0 + \varepsilon \int_0^v \frac{v_1 dv_1}{y - v_1 - e^{-xy}} + O(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (3.161)$$

Полагая в (3.160) $\varphi(x) = -x$, сначала определим нулевое приближение для $v(x, \varepsilon)$:

$$V_0\left(x, -\frac{x}{\varepsilon}, y_0\right) = (1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}})(y_0 - e^{-xy_0}), \quad (3.162)$$

а затем, применив формулу (3.78), найдем первое приближение решения $y(x, \varepsilon)$ поставленной краевой задачи:

$$y_1(x, \varepsilon, \varepsilon) = y_0 + (y_0 - e^{-y_0 x})(x - \varepsilon(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}})), \quad (3.163)$$

где y_0 может быть приближенно найдено из уравнения

$$y_0 + (y_0 - e^{-y_0})(1 - \varepsilon(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}})) = 0. \quad (3.164)$$

Раскладывая экспоненту в ряд, можно доказать, что с большой степенью точности $y_0 \approx 3 - \sqrt{7}$, что согласуется с тем фактом, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \beta(0, \varepsilon) = e^{-1}.$$

ГЛАВА IV. ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной главе метод голоморфной регуляризации распространяется на системы дифференциальных уравнений в нормальной форме. Сначала рассматривается система без параметра и для нее строятся интегралы в виде рядов. При этом указаны два способа построения систем независимых интегралов, основанных на коммутационных соотношениях и соответствующих им гомоморфизмах алгебр функций различного числа переменных (так же как и в случае одного уравнения). Далее рассматриваются сингулярно возмущенные системы. Главная идея метода голоморфной регуляризации, основанная на обобщении теоремы Пуанкаре о разложении и связанная с доказательством существования голоморфных по параметру интегралов, здесь реализуется двумя способами: первый основан на подходе, изложенном для систем без параметра, а второй использует интегральный метод решения уравнений в частных производных первого порядка. Затем снова рассматривается уравнение химической кинетики, но теперь оно сводится к системе, в которой присутствуют только быстрые переменные и строятся два независимых, голоморфных в точке $\varepsilon = 0$, интеграла.

Центральное место в этой главе отведено понятию псевдоголоморфного решения сингулярно возмущенной системы. При этом сформулированы и доказаны достаточные условия глобальной псевдоголоморфности и указана связь с устойчивостью решений системы характеристик. Метод голоморфной регуляризации далее реализуется для приближенного решения линейных систем и сводящихся к ним. Завершается глава обобщением метода голоморфной регуляризации на случай сингулярно возмущенных уравнений в банаховых пространствах.

§ 4.1. Коммутационные соотношения и системы дифференциальных уравнений

Пусть дана система дифференциальных уравнений

[illegible]

с начальными условиями

$$\begin{aligned} w_1(z_0) &= w_{10}, \\ w_2(z_0) &= w_{20}, \\ &\dots\dots\dots \\ w_k(z_0) &= w_{k0} \end{aligned} \tag{4.2}$$

и правыми частями $f_1(z, w_1, \dots, w_k), f_2(z, w_1, \dots, w_k), \dots, f_k(z, w_1, \dots, w_k)$ из $\mathcal{U}_{z_0 \bar{w}_0}^{k+1}$ — алгебры функций комплексных переменных $(z, w_1, \dots, w_k)$, голоморфных в точке $Q_0^{k+1}(z_0, w_{10}, \dots, w_{k0})$. Иногда будем использовать векторную форму записи задачи Коши (4.1), (4.2):

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{w}}{dz} &= \bar{f}(z, \bar{w}); \\ \bar{w}(z_0) &= \bar{w}_0,\end{aligned}\tag{4.3}$$

где $\bar{w} = (w_1, \dots, w_k)$, $\bar{f} = (f_1, \dots, f_k)$, $\bar{w}_0 = (w_{10}, \dots, w_{k0})$. Предположим вначале, что $f_m(z_0, \bar{w}_0) \neq 0$ при $m = \overline{1, k}$, т.е. $f_m(z, \bar{w}) \in \mathcal{F}_{z_0 \bar{w}_0}^{k+1}$.

Уравнение интегралов системы (4.1) в окрестности точки $Q_0^{k+1}(z_0, \overline{w}_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial z} + f_1 \frac{\partial U}{\partial w_1} + \dots + f_k \frac{\partial U}{\partial w_k} = 0. \quad (4.4)$$

Обозначим через

$$L_m^{(k)} = \frac{\partial}{\partial z} + f_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + \dots + f_{m-1} \frac{\partial}{\partial w_{m-1}} + f_{m+1} \frac{\partial}{\partial w_{m+1}} + \dots + f_k \frac{\partial}{\partial w_k} \quad (4.5)$$

линейный дифференциальный оператор в частных производных первого порядка, в котором отсутствует операция дифференцирования по w_m , $m = 1, \dots, k$. Тогда уравнение (4.5) можно представить k способами:

$$L_m^{(k)}U + f_m \frac{\partial U}{\partial w_m} = 0, \quad m = \overline{1, k}. \quad (4.6)$$

Введем еще одно обозначение: $\varphi^{[m]}(z, w_1, \dots, w_{m-1}, w_{m+1}, \dots, w_k) \in \mathcal{U}_{z_0 \overline{w}_0}^{k+1}$ — функция k переменных, независимая от переменной w_m . Так же, как и в случае уравнения k -го порядка, построим k интегралов системы (4.1):

$$\begin{aligned} U^{[m]}(z, \overline{w}) &= (A_{\overline{f}, m} \varphi^{[m]})(z, \overline{w}) = \varphi^{[m]} - \\ &- \int_{w_{m0}}^{w_m} \frac{L_m^{(k)} \varphi^{[m]} dw_m^{(1)}}{f_m(z, w_1, \dots, w_{m-1}, w_m^{(1)}, w_{m+1}, \dots, w_k)} + \\ &+ \int_{w_{m0}}^{w_m} \left(L_m^{(k)} \int_{w_{m0}}^{w_m^{(1)}} \frac{L_m^{(k)} \varphi^{[m]} dw_m^{(2)}}{f_m(z, w_1, \dots, w_{m-1}, w_m^{(2)}, w_{m+1}, \dots, w_k)} \right) \times \\ &\times \frac{dw_m^{(1)}}{f_m(z, w_1, \dots, w_{m-1}, w_m^{(1)}, w_{m+1}, \dots, w_k)} - \\ &+ \int_{w_{m0}}^{w_m} \left(L_m^{(k)} \int_{w_{m0}}^{w_m^{(1)}} \left(L_m^{(k)} \int_{w_{m0}}^{w_m^{(2)}} \frac{L_m^{(k)} \varphi^{[m]} dw_m^{(3)}}{f_m(z, w_1, \dots, w_{m-1}, w_m^{(3)}, w_{m+1}, \dots, w_k)} \right) \times \right. \\ &\times \frac{dw_m^{(2)}}{f_m(z, w_1, \dots, w_{m-1}, w_m^{(2)}, w_{m+1}, \dots, w_k)} \left. \right) \times \\ &\times \frac{dw_m^{(1)}}{f_m(z, w_1, \dots, w_{m-1}, w_m^{(1)}, w_{m+1}, \dots, w_k)} + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

$m = \overline{1, k}$.

То, что ряд (4.7) при фиксированном $m \in \{1, \dots, k\}$ удовлетворяет уравнению (4.4) и сходится равномерно в некоторой окрестности $\Omega_{z_0 \overline{w}_0}^{k+1}$ точки $Q_0^{k+1}(z_0, \overline{w}_0)$, доказывается так же, как и в § 3.1 (см. с. 99).

Для построения k независимых интегралов системы (4.1), положим $\varphi^{[1]} = z - z_0$, $\varphi^{[2]} = w_1 - w_{10}$, ..., $\varphi^{[k]} = w_{k-1} - w_{k-10}$. Тогда,

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial U^{[1]}}{\partial w_1} & \frac{\partial U^{[2]}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial U^{[k]}}{\partial w_1} \\ \frac{\partial U^{[1]}}{\partial w_2} & \frac{\partial U^{[2]}}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial U^{[k]}}{\partial w_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial U^{[1]}}{\partial w_k} & \frac{\partial U^{[2]}}{\partial w_k} & \cdots & \frac{\partial U^{[k]}}{\partial w_k} \end{array} \right|_{(z_0, \bar{w}_0)} = \\
& = \left| \begin{array}{cccc} -\frac{L_1^{(k)} \varphi^{[1]}}{f_1} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{L_2^{(k)} \varphi^{[2]}}{f_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{L_k^{(k)} \varphi^{[k]}}{f_k} \end{array} \right|_{(z_0, \bar{w}_0)} = \\
& = (-1)^k \frac{1}{f_1} \cdot \frac{f_1}{f_2} \cdots \frac{f_{k-1}}{f_k} \Big|_{(z_0, \bar{w}_0)} = \frac{(-1)^k}{f_k(z_0, \bar{w}_0)} \neq 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

(в этом определителе, над главной диагональю находится диагональ, состоящая из единиц).

Таким образом, существует окрестность точки $Q^{k+1}(z_0, \bar{w}_0)$, в которой построенные интегралы независимы. Они и определяют неявно решение задачи Коши (4.1), (4.2), если приравнять их нулю.

Далее, не ограничивая общности, получим коммутационное соотношение для оператора $A_{\bar{f}, k}$. Для этого, через $\mathcal{U}_{z_0 \bar{w}_0}^{k, k}$ обозначим подалгебру алгебры $\mathcal{U}_{z_0 \bar{w}_0}^{k+1}$, состоящую из функций $\varphi^{[k]}(z, w_1, \dots, w_{k-1})$, независимых от переменной w_k . Тогда, в соответствии с общей теорией систем дифференциальных уравнений, существует функция $\Phi^{[k]}$, зависящая от k переменных, такая, что

$$(A_{\bar{f},k}\varphi^{[k]})(z,\bar{w}) = \Phi^{[k]}((A_{\bar{f},1}z)(z,\bar{w}), (A_{\bar{f},2}w_1)(z,\bar{w}), \dots, (A_{\bar{f},k}w_{k-1})(z,\bar{w})). \quad (4.9)$$

Если положить в этом равенстве $w_1 = w_{10}, w_2 = w_{20}, \dots, w_k = w_{k0}$, то из него будет следовать тождественное в некоторой окрестности точки $(z_0, w_{10}, \dots, w_{k-10})$, равенство

$$\varphi^{[k]}(z, w_1, \dots, w_{k-1}) = \Phi^{[k]}(z, w_1, \dots, w_{k-1}),$$

ввиду которого, оно является коммутационным соотношением:

$$(A_{\bar{f},k}\varphi^{[k]})(z,\bar{w}) = \varphi^{[k]}((A_{\bar{f},1}z)(z,\bar{w}), (A_{\bar{f},2}w_1)(z,\bar{w}), \dots, (A_{\bar{f},k}w_{k-1})(z,\bar{w})). \quad (4.10)$$

Теперь докажем, что $A_{\bar{f},k}$ является гомоморфизмом алгебр $\mathcal{U}_{z_0\bar{w}_0}^{k,k}$ и $\mathcal{U}_{z_0\bar{w}_0}^{k+1}$. Пусть, $\varphi_1^{[k]}, \varphi_2^{[k]} \in \mathcal{U}_{z_0\bar{w}_0}^{k,k}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} (A_{\bar{f},k}(\varphi_1^{[k]}\varphi_2^{[k]}))(z,\bar{w}) &= (\varphi_1^{[k]}\varphi_2^{[k]})((A_{\bar{f},1}z)(z,\bar{w}), (A_{\bar{f},2}w_1)(z,\bar{w}), \dots, \\ &= (\varphi_1^{[k]}((A_{\bar{f},1}z)(z,\bar{w}), (A_{\bar{f},2}w_1)(z,\bar{w}), \dots, (A_{\bar{f},k}w_{k-1})(z,\bar{w}))) \cdot \\ &\quad \cdot \varphi_2^{[k]}((A_{\bar{f},1}z)(z,\bar{w}), (A_{\bar{f},2}w_1)(z,\bar{w}), \dots, (A_{\bar{f},k}w_{k-1})(z,\bar{w})) = \\ &= (A_{\bar{f},k}\varphi_1^{[k]})(z,\bar{w})(A_{\bar{f},k}\varphi_2^{[k]})(z,\bar{w}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

что и требовалось доказать.

Совершенно аналогично доказывается, что отображение $A_{\bar{f},m} : \mathcal{U}_{z_0\bar{w}_0}^{k,m} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0\bar{w}_0}^{k+1}$ при $m = \overline{1, k-1}$, где $\mathcal{U}_{z_0\bar{w}_0}^{k,m}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{U}_{z_0\bar{w}_0}^{k+1}$, состоящая из функций $\varphi^{[m]}(z, w_1, \dots, w_{m-1}, w_{m+1}, \dots, w_k)$, независимых от переменной w_m , также является гомоморфизмом указанных алгебр. В итоге, можно построить k коммутационных соотношений и эквивалентных им гомоморфизмов.

Для построения других коммутационных соотношений, рассмотрим k интегралов системы (4.1), положив в равенствах (4.7) $\varphi^{[m]} = z \quad \forall m \in \{1, \dots, k\}$. Их независимость в некоторой окрестности $\tilde{\Omega}_{z_0\bar{w}_0}^{k+1} \subset \Omega_{z_0\bar{w}_0}^{k+1}$ точки $Q_0^{k+1}(z_0, \bar{w}_0)$ вытекает из неравенства

$$\frac{\partial(U^{[1]}, \dots, U^{[k]})}{\partial(w_1, \dots, w_k)} \Big|_{(z_0, \bar{w}_0)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{f_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{f_1} \end{vmatrix} \Big|_{(z_0, \bar{w}_0)} = \frac{(-1)^k}{f_1 \dots f_k} \Big|_{(z_0, \bar{w}_0)} \neq 0. \quad (4.12)$$

В частности, из определителя (4.12) следует, что

$$\frac{\partial(U^{[1]}, \dots, U^{[m-1]}, U^{[m+1]}, \dots, U^{[k]})}{\partial(w_1, \dots, w_{m-1}, w_{m+1}, \dots, w_k)} \Big|_{(z_0, \bar{w}_0)} = \frac{(-1)^{k-1}}{f_1 \dots f_{m-1} f_{m+1} \dots f_k} \Big|_{(z_0, \bar{w}_0)} \neq 0, \quad (4.13)$$

т.е. функции $U^{[1]}(z, w_1, \dots, w_{m-1}, w_{m0}, w_{m+1}, \dots, w_k), \dots, U^{[k]}(z, w_1, \dots, w_{m-1}, w_{m0}, w_{m+1}, \dots, w_k)$ независимы, как функции переменных $(w_1, \dots, w_{m-1}, w_{m+1}, \dots, w_k)$, если положить $w_m = w_{m0}$. Этот факт нам понадобится в дальнейшем (см. ниже).

Не ограничивая общности, рассмотрим отображение $\mathcal{A}_{\bar{f},1} : \mathcal{A}_{z_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 \bar{w}_0}^{k+1}$, заданное по формуле (4.7). Если $\psi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$, то существует функция $\Psi(z_1, \dots, z_k)$ комплексных переменных $(z_1, \dots, z_k)$ такая, что

$$(A_{\bar{f},1}\psi)(z, \bar{w}) = \Psi((A_{\bar{f},1}z)(z, \bar{w}), \dots, (A_{\bar{f},k}z)(z, \bar{w})) \quad (4.14)$$

$$\forall (z, \bar{w}) \in \tilde{\Omega}_{z_0 \bar{w}_0}^{k+1}.$$

Положим в получившемся равенстве $w_1 = w_{10}$, тогда из него будет следовать тождественное равенство

$$\psi(z) = \Psi(z, (A_{\bar{f},2}z)(z, \bar{w}), \dots, (A_{\bar{f},k}z)(z, \bar{w})) \Big|_{w_1=w_{10}}. \quad (4.15)$$

Левая часть равенства (4.15) зависит только от z , поэтому

$$0 \equiv \frac{\partial \psi(z)}{\partial w_m} = \frac{\partial \Psi}{\partial z_2} \frac{\partial((A_{\bar{f},2}z)(z, \bar{w}))}{\partial w_m} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial z_k} \frac{\partial((A_{\bar{f},k}z)(z, \bar{w}))}{\partial w_m}, \quad (4.16)$$

$\forall m = 2, \dots, k$.

Но тогда из уравнений (4.16) ввиду факта, вытекающего из соотношения (4.13) (при $m = 1$) следует, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z_2} = \dots = \frac{\partial \Psi}{\partial z_k} \equiv 0,$$

т.е. функция Ψ не зависит от переменных $z_2, \dots, z_k$, а является функцией только одной переменной z . Итак, $\psi(z) = \Psi(z)$, и мы получим коммутационное соотношение для отображения $A_{\overline{f},1}: \mathcal{A}_{z_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0 \overline{w}_0}^{k+1}$:

$$(A_{\bar{f},1}\psi)(z,\overline{w}) = \psi((A_{\bar{f},1})(z,\overline{w})) \quad \forall \psi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}. \quad (4.17)$$

То, что $A_{\bar{f},1}$ является гомоморфизмом алгебр $\mathcal{A}_{z_0}$ и $\mathcal{U}_{z_0\bar{w}_0}^{k+1}$, доказывается так же, как и в случае уравнения первого порядка (см. гл. II, с. 62). Все сказанное выше справедливо и для отображений $A_{\bar{f},m} : \mathcal{A}_{z_0} \rightarrow \mathcal{U}_{z_0\bar{w}_0}^{k+1}$ при $m = \overline{2, k}$.

Таким образом, любая система дифференциальных уравнений вида (4.1) порождает коммутационные соотношения и эквивалентные им гомоморфизмы алгебр голоморфных функций различного числа переменных. Докажем теперь, что имеет место и обратное утверждение. Пусть $\{A_m\}_{m=1}^k$ — система отображений алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0\bar{w}_0}^{k+1}$, удовлетворяющая коммутационным соотношениям

$$(A_m \psi)(z, \overline{w}) = \psi((A_m z)(z, \overline{w})) \quad \forall \psi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}, \quad m = \overline{1, k}, \quad (4.17')$$

причем

$$\left. \frac{\partial((A_1 z)(z, \bar{w}), \dots, (A_k z)(z, \bar{w}))}{\partial(w_1, \dots, w_k)} \right|_{(z_0, \bar{w}_0)} \neq 0. \quad (4.18)$$

Продифференцируем каждое из равенств (4.17') по переменным $z, w_1, \dots, w_k$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}[(A_m\psi)(z, \overline{w})] &= \psi'((A_m z)(z, \overline{w}))\frac{\partial[(A_m\psi)(z, \overline{w})]}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial w_1}[(A_m\psi)(z, \overline{w})] &= \psi'((A_m z)(z, \overline{w}))\frac{\partial[(A_m\psi)(z, \overline{w})]}{\partial w_1},\end{aligned}\tag{4.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_k} [(A_m \psi)(z, \bar{w})] = \psi'((A_m z)(z, \bar{w})) \frac{\partial [(A_m \psi)(z, \bar{w})]}{\partial w_k},$$

$m = \overline{1, k}$ и рассмотрим линейную систему уравнений

§ 4.2. Голоморфные по малому параметру интегралы

Применим способ, изложенный в § 4.1, для построения голоморфных в точке $\varepsilon = 0$ интегралов системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{dw_1}{dz} = f_1(z, w_1, \dots, w_k), \\ \\ \varepsilon \frac{dw_k}{dz} = f_k(z, w_1, \dots, w_k), \end{array} \right. \quad (4.20)$$

в окрестности точки $Q_0^{k+1}(z_0, \overline{w}_0)$, с правыми частями $f_m(z, \overline{w}) \in \mathcal{U}_{z_0 \overline{w}_0}^{k+1}$, $m = \overline{1, k}$, не обращающимися в ноль в некоторой окрестности этой точки. Запишем уравнение интегралов системы

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} + f_1 \frac{\partial U}{\partial w_1} + \dots + f_k \frac{\partial U}{\partial w_k} = 0 \quad (4.21)$$

и введем линейные дифференциальные операторы первого порядка в частных производных

$$L_{m\varepsilon}^{(k)} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} + f_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + \dots + f_{m-1} \frac{\partial}{\partial w_{m-1}} + f_{m+1} \frac{\partial}{\partial w_{m+1}} + \dots + f_k \frac{\partial}{\partial w_k}, \quad m = \overline{1, k} \quad (4.22)$$

по принципу, изложенному в § 4.1.

В этих условиях уравнение (4.21) примет вид:

$$L_{m\varepsilon}^{(k)}U + f_m \frac{\partial U}{\partial w_m} = 0. \quad (4.23)$$

Имеют место формулы (4.7) с заменой $L_m^{(k)}$ на $L_{m\varepsilon}^{(k)}$. Ясно, что ряд, аналогичный ряду (4.7), сходится и его сумма $U^{[m]}(z, \overline{w}, \varepsilon)$ голоморфна в точке $\varepsilon = 0$, так как он сходится абсолютно и равномерно при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ (ε_0 — некоторое положительное число) в некоторой окрестности $\Omega_{z_0 \overline{w}_0}^{k+1}$ точки Q_0^{k+1} . Аналогично линейным операторам $A_{\overline{f},1}, \dots, A_{\overline{f},k}$ строятся операторы $A_{\overline{f},1}^\varepsilon, \dots, A_{\overline{f},k}^\varepsilon$, осуществляющие коммутационные соотношения

и являющиеся гомоморфизмами соответствующих алгебр. Однако, при указанном подходе, весьма затруднительно получать псевдоголоморфные решения систем вида (4.20), к тому же, требование необращаемости в ноль правых частей этой системы весьма сужает круг рассматриваемых задач. Поэтому, сейчас будет предложен другой способ построения голоморфных в точке $\varepsilon = 0$ интегралов системы (4.20).

Для дальнейшего нам понадобится интегральный метод решения линейных неоднородных уравнений первого порядка с частными производными [73]. Итак, пусть задано уравнение

$$a_1(x_1, \dots, x_k) \frac{\partial U}{\partial x_1} + \dots + a_k(x_1, \dots, x_k) \frac{\partial U}{\partial x_k} = b(x_1, \dots, x_k). \quad (4.24)$$

Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \bar{a}(\bar{x}), \quad (4.25)$$

где $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, называется, как известно, системой уравнений характеристик для соответствующего (4.24) однородного уравнения, а ее фазовые кривые — характеристиками.

Теорема 4.1 [73]. *Задача Коши для уравнения (4.24) с начальным условием*

$$U(\bar{x}) \Big|_{\bar{x} \in \gamma} = \varphi(\bar{x})$$

в достаточно малой окрестности любой нехарактеристической точки $\bar{x}$ (точка $\bar{x} \in \gamma$ называется нехарактеристической, если характеристика, проходящая через эту точку, трансверсальна, т.е. не касательна, к начальной гиперповерхности γ) имеет решение и притом единственное. Это решение определяется формулой

$$U(\bar{g}(\bar{x}, s)) = \varphi(\bar{x}) + \int_0^s b(\bar{g}(\bar{x}, \tau)) d\tau, \quad (4.26)$$

где $\bar{g}(\bar{x}, s)$ — значение решения уравнения характеристик (с начальным условием $\bar{g}(\bar{x}, 0) = \bar{x}$ на начальной гиперповерхности γ) в момент времени s .

Формула (4.26) дает интегральный метод решения уравнений в частных производных первого порядка. Главным преимуществом использования формулы (4.26), в первую очередь, является получение решения уравнения (4.24) в явном виде. Другим достоинством этой формулы является наличие в ней интегрального оператора Вольтерра, степени которого хорошо поддаются оценке (см. гл. I, с. 40).

Вернемся к системе (4.20), при этом, иногда, будем использовать векторную форму рассматриваемой задачи Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d\bar{w}}{dz} &= \bar{f}(z, \bar{w}); \\ \bar{w}(z_0, \varepsilon) &= \bar{w}_0.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Будем искать решение уравнения (4.21) интегралов этой системы в виде ряда по степеням ε :

$$U(z, \bar{w}, \varepsilon) = U_0(z, \bar{w}) + \varepsilon U_1(z, \bar{w}) + \dots + \varepsilon^n U_n(z, \bar{w}) + \dots \tag{4.28}$$

Имеем, в соответствии с методом неопределенных коэффициентов, серию уравнений для определения коэффициентов этого ряда:

$$f_1 \frac{\partial U_0}{\partial w_1} + \dots + f_k \frac{\partial U_0}{\partial w_k} = 0, \tag{4.29_0}$$

$$f_1 \frac{\partial U_1}{\partial w_1} + \dots + f_k \frac{\partial U_1}{\partial w_k} = -\frac{\partial U_0}{\partial z}, \tag{4.29_1}$$

$$\begin{aligned} &\dots\dots\dots \\ f_1 \frac{\partial U_n}{\partial w_1} + \dots + f_k \frac{\partial U_n}{\partial w_k} &= -\frac{\partial U_{n-1}}{\partial z}, \end{aligned} \tag{4.29_n}$$

.....

Для уравнения (4.29₀) автономная система

$$\frac{d\bar{w}}{ds} = \bar{f}(z, \bar{w}), \tag{4.30}$$

в которой z выступает в роли параметра, а s — независимой переменной, является системой уравнений характеристик. Обозначим через $U_0^{[1]}(z, \bar{w}), \dots, U_0^{[k-1]}(z, \bar{w})$ $(k-1)$ независимых интегралов системы (4.30) таких, что $U_0^{[m]}(z, \bar{w}_0) = 0$, $m = \overline{1, k-1}$. Такая система интегралов существует, в соответствии с теорией уравнений в частных производных

первого порядка при дополнительном предположении, что в некоторой окрестности точки $\tilde{Q}_0^k(w_{10}, \dots, w_{k0})$ правые части системы (4.20) не обращаются в ноль одновременно, при каждом фиксированном z из некоторой окрестности точки z_0 .

Рассмотрим k решений уравнения (4.29₀):

$$\{U_0^{[0]}(z, \bar{w}), U_0^{[1]}(z, \bar{w}), \dots, U_0^{[k-1]}(z, \bar{w})\}, \quad (4.31)$$

где $U_0^{[0]}(z, \bar{w}) \equiv z - z_0$, и для доказательства функциональной независимости (4.31), составим матрицу

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial U_0^{[1]}}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial U_0^{[k-1]}}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial U_0^{[1]}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial U_0^{[k-1]}}{\partial w_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial U_0^{[1]}}{\partial w_k} & \cdots & \frac{\partial U_0^{[k-1]}}{\partial w_k} \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Ясно, что $\text{Rg } \mathcal{M} = k$, поскольку отличен от нуля определитель, составленный из первой строки и $(k-1)$ линейно независимых строк, содержащих базисный минор матрицы

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0^{[1]}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial U_0^{[k-1]}}{\partial w_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial U_0^{[1]}}{\partial w_k} & \cdots & \frac{\partial U_0^{[k-1]}}{\partial w_k} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

у которой $\text{Rg } \widetilde{\mathcal{M}} = k-1$ (ввиду независимости $U_0^{[1]}(z, \bar{w}), \dots, U_0^{[k-1]}(z, \bar{w})$), а, значит, система (4.31) — независимая. Далее, проведем через точку $\tilde{Q}_0^k(\bar{w}_0) \in \mathbb{C}_{w_1} \times \dots \times \mathbb{C}_{w_k}$ голоморфно гладкую поверхность Λ так, чтобы характеристики, проходящие через нее, были трансверсальны (не касательны) к ней, и потребуем, чтобы

$$U_n^{[m]}(z, \bar{w}) \Big|_{\bar{w} \in \Lambda} = 0, \quad (4.34)$$

$$m = 0, 1, \dots, k-1; \quad n = 1, 2, \dots$$

Предположим, что на поверхности Λ заданы координаты $\overline{w} = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{k-1})$, и пусть $\overline{g}(s, \overline{w}, z)$ — значение решения системы (4.30), с начальным условием $\overline{g}(0, \overline{w}, z) = \overline{w}$ на поверхности Λ , в момент времени s . Рассмотрим теперь записанную в векторном виде систему

$$\overline{g}(s, \overline{w}, z) = \overline{w}, \quad (4.35)$$

и разрешим ее относительно s и $\overline{w}$:

$$\begin{cases} s = S(\overline{w}, z), \\ \overline{w} = \overline{G}(\overline{w}, z) \end{cases} \quad (4.36)$$

(это возможно, в силу теоремы единственности).

Определение 4.1. Оператор $W(z)$, действующий по формуле

$$W[\varphi(s, \overline{w}, z)] = \varphi(S(\overline{w}, z), \overline{G}(\overline{w}, z), z), \quad (4.37)$$

называется *оператором замены* переменных $(s, \overline{w})$ на переменные $\overline{w}$. Обратный к нему оператор $W^{-1}(z, s)$, заданный формулой

$$W^{-1}[\Phi(\overline{w}, z)] = \Phi(\overline{g}(s, \overline{w}, z), z), \quad (4.38)$$

назовем *оператором замены* переменных $\overline{w}$ на переменные $(s, \overline{w})$.

Заметим, что обе эти операции, при соответствующем выборе окрестности точки $\tilde{Q}_0^k(w_{10}, \dots, w_{k0})$ и окрестности точки $\tilde{Q}_0^{k+1}(0, \tilde{w}_{10}, \dots, \tilde{w}_{k-10})$, не изменяют оценку модуля рассматриваемой функции (точка $(\tilde{w}_{10}, \dots, \tilde{w}_{k-10}) \in \Lambda$ геометрически совпадает с точкой $\tilde{Q}_0^k(\overline{w}_0)$).

В итоге, в соответствии с формулой (4.26), имеем

$$U_1^{[m]}(z, \overline{w}) = -W(z) \int_0^s W^{-1}(z, s_1) \frac{\partial}{\partial z} U_0^{[m]}(z, \overline{w}) ds_1, \quad (4.39_1)$$

$$\begin{aligned} U_2^{[m]}(z, \overline{w}) = & W(z) \int_0^s ds_1 W^{-1}(z, s_1) \frac{\partial}{\partial z} W(z) \int_0^{s_1} W^{-1}(z, s_2) \cdot \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial z} U_0^{[m]}(z, \overline{w}) ds_2, \end{aligned} \quad (4.39_2)$$

$$\begin{aligned}
& \dots\dots\dots \\
U_n^{[m]}(z, \bar{w}) &= (-1)^n W(z) \int_0^s ds_1 W^{-1}(z, s_1) \frac{\partial}{\partial z} W(z) \int_0^{s_1} ds_2 W^{-1}(z, s_2) \cdot \\
& \cdot \frac{\partial}{\partial z} \dots W(z) \int_0^{s_{n-1}} W^{-1}(z, s_n) \frac{\partial}{\partial z} U_0^{[m]}(z, \bar{w}) ds_n, \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{4.39_n}$$

Представим эти выражения, воспользовавшись интегральной формулой Коши:

$$U_1^{[m]}(z, \bar{w}) = -\frac{1}{2\pi i} W(z) \int_0^s W^{-1}(z, s_1) \oint_{C_1} \frac{dz_1}{(z - z_1)^2} U_0^{[m]}(z_1, \bar{w}) ds_1, \tag{4.40_1}$$

$$\begin{aligned}
U_2^{[m]}(z, \bar{w}) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} W(z) \int_0^s ds_1 W^{-1}(z, s_1) \oint_{C_1} \frac{dz_1}{(z - z_1)^2} W(z_1) \cdot \\
& \cdot \int_0^{s_1} W^{-1}(z_1, s_2) \oint_{C_2} \frac{dz_2}{(z_1 - z_2)^2} U_0^{[m]}(z_2, \bar{w}) ds_2, \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{4.40_2}$$

$$\begin{aligned}
U_n^{[m]}(z, \bar{w}) &= \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} W(z) \int_0^s ds_1 W^{-1}(z, s_1) \oint_{C_1} \frac{dz_1}{(z - z_1)^2} W(z_1) \cdot \\
& \cdot \int_0^{s_1} ds_2 W^{-1}(z_1, s_2) \oint_{C_2} \frac{dz_2}{(z_1 - z_2)^2} \dots W^{-1}(z_{n-1}, s_n) \cdot \\
& \cdot \oint_{C_n} \frac{dz_n}{(z_n - z_{n-1})^2} U_0^{[m]}(z_n, \bar{w}) ds_n, \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{4.40_n}$$

Здесь $m = \overline{0, k-1}$; $\{C_l\}_{l=1}^n$ — система окружностей с центром в точке z_0 , построенная так же, как и в § 2.2. Учитывая замечание по поводу операций $W(z)$ и $W^{-1}(z, s)$ по схеме, принятой в § 2.2, можно оценить общий член ряда (4.28) при каждом $m = \overline{0, k-1}$:

$$|U_n^{[m]}(z, \bar{w})| \leq \left| \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \right| H_n \frac{1}{(2\pi)^n} \|U_0^{[m]}(z, \bar{w})\|_C \leq M_C \mathcal{K}_C^n |s|^n, \tag{4.41}$$

где $\|U_0^{[m]}(z, \bar{w})\|_C = \max |U_0^{[m]}(z, \bar{w})|$ на произвольном компакте из окрестности, в которой голоморфна функция $U_0^{[m]}(z, \bar{w})$; M_C и K_C — положительные константы, зависящие от компакта. Отсюда следует равномерная сходимость ряда (4.28) на любом компакте из указанной окрестности, в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (зависящей от компакта).

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 4.2. Пусть в системе (4.27) правая часть $f(z, \bar{w})$ голоморфна в точке $(z_0, \bar{w}_0)$. Тогда у этой системы существуют k независимых интегралов

$$\{U^{[0]}(z, \bar{w}, \varepsilon), U^{[1]}(z, \bar{w}, \varepsilon), \dots, U^{[k-1]}(z, \bar{w}, \varepsilon)\},$$

голоморфных в точке $\varepsilon = 0$.

Доказательство немедленно следует из независимости системы (4.31) и уменьшения, в случае необходимости, окрестности точки $\varepsilon = 0$ сходимости ряда (4.28).

Эта теорема позволяет дополнить теорему Пуанкаре о разложении, на случай сингулярно входящего в систему параметра. А именно, система

$$\frac{d\bar{w}}{dz} = \bar{f}(z, \bar{w}, \varepsilon),$$

при условии голоморфности правой части в точке $(z_0, \bar{w}_0, 0)$, имеет голоморфное в окрестности точки $\varepsilon = 0$ решение $\bar{w}(z, \varepsilon)$; система же

$$\varepsilon \frac{d\bar{w}}{dz} = \bar{f}(z, \bar{w}),$$

с правой частью голоморфной в точке $(z_0, \bar{w}_0)$, имеет k независимых интегралов, голоморфных в точке $\varepsilon = 0$.

§ 4.3. Голоморфные по параметру интегралы уравнения химической кинетики

В § 3.5 рассматривалось уравнение химической кинетики, которое сводилось к системе с быстрыми и медленными переменными (см. систему

(3.94)). Повысим степень малого параметра и рассмотрим уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 w}{dz^2} = (w - \varphi(z))^p; \quad p \in \mathbb{N} \quad (4.42)$$

с начальными условиями

$$w(0, \varepsilon) = 0, \quad w'(0, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (4.43)$$

Здесь, в отличие от уравнения (3.111), p — произвольное натуральное число, большее единицы; $\varphi(z)$ — голоморфная в точке $z = 0$ функция. Сведем уравнение (4.42) к системе

$$\begin{cases} \varepsilon w' = v, \\ \varepsilon v' = (w - \varphi(z))^p \end{cases} \quad (4.44)$$

с начальными условиями

$$w(0, \varepsilon) = 0, \quad v(0, \varepsilon) = 1. \quad (4.45)$$

В этой системе, как нетрудно видеть, присутствуют только быстрые переменные, и поэтому она является системой вида (4.20).

Составим уравнение интегралов системы (4.44)

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} + v \frac{\partial U}{\partial w} + (w - \varphi(z))^p \frac{\partial U}{\partial v} = 0, \quad (4.46)$$

решение которого будем искать в виде ряда по степеням ε :

$$U(z, w, v, \varepsilon) = U_0(z, w, v) + \varepsilon U_1(z, w, v) + \dots + \varepsilon^n U_n(z, w, v) + \dots \quad (4.47)$$

Имеем, в соответствии с методом неопределенных коэффициентов:

$$v \frac{\partial U_0}{\partial w} + (w - \varphi(z))^p \frac{\partial U_0}{\partial v} = 0, \quad (4.47_0)$$

$$v \frac{\partial U_1}{\partial w} + (w - \varphi(z))^p \frac{\partial U_1}{\partial v} = -\frac{\partial U_0}{\partial z}, \quad (4.47_1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$v \frac{\partial U_n}{\partial w} + (w - \varphi(z))^p \frac{\partial U_n}{\partial v} = -\frac{\partial U_{n-1}}{\partial z}, \quad (4.47_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

Нетрудно видеть, что функции

$$\begin{aligned} U_0^{[0]}(z, w, v) &= z, \\ U_0^{[1]}(z, w, v) &= \frac{v^2}{2} - \frac{(w - \varphi(z))^{p+1}}{p+1} \end{aligned} \quad (4.48)$$

являются решениями уравнения (4.47₀). Чтобы решить последующие уравнения серии (4.47), решим систему уравнений характеристик

$$\begin{cases} \frac{dw}{ds} = v, \\ \frac{dv}{ds} = (w - \varphi(z))^p. \end{cases} \quad (4.49)$$

Пользуясь равенством $U_0^{[1]}(z, w, v) = C_1$, где C_1 — произвольная константа, получаем

$$v = \sqrt{2C_1 + \frac{2(w - \varphi(z))^{p+1}}{p+1}}. \quad (4.50)$$

Следовательно, первое уравнение системы (4.49) примет вид

$$\frac{dw}{ds} = \sqrt{2C_1 + \frac{2(w - \varphi(z))^{p+1}}{p+1}}. \quad (4.51)$$

решив которое, получим

$$\int \frac{dw}{\sqrt{2C_1 + \frac{2(w - \varphi(z))^{p+1}}{p+1}}} = s + C_2. \quad (4.52)$$

Первообразную в левой части равенства (4.52) обозначим через $\lambda(w, z, C_1)$ и перепишем его в виде

$$\lambda(w, z, C_1) = s + C_2. \quad (4.53)$$

Пусть уравнение (4.53) неявно определяет функцию $w = \Theta(s, z, C_1, C_2)$, тогда решение системы уравнений характеристик примет вид

$$\begin{cases} w = \Theta(s, z, C_1, C_2), \\ v = \sqrt{2C_1 + \frac{2(\Theta(s, z, C_1, C_2) - \varphi(z))^{p+1}}{p+1}}. \end{cases} \quad (4.54)$$

Теперь перейдем к решению (4.47₁). В качестве начальной поверхности Λ выберем гиперплоскость $v = 1$ и поставим для этого уравнения начальное условие:

$$U_1^{[m]}(z, w, v) \Big|_{v=1} = 0, \quad m = 0, 1. \quad (4.55)$$

Выберем C_1 и C_2 в (4.54) так, чтобы в момент времени $s = 0$ точка $(w, v) \in \Lambda$. Для этого решим относительно C_1 и C_2 следующую систему, обозначив координату поверхности Λ через $\tilde{w}$:

$$\begin{cases} \Theta(0, z, C_1, C_2) = \tilde{w}, \\ \sqrt{2C_1 + \frac{2(\Theta(0, z, C_1, C_2) - \varphi(z))^{p+1}}{p+1}} = 1. \end{cases} \quad (4.56)$$

Пусть

$$\begin{cases} C_1 = \chi_1(\tilde{w}, z), \\ C_2 = \chi_2(\tilde{w}, z) \end{cases} \quad (4.57)$$

— решение системы (4.56), тогда

$$\begin{cases} g_1(\tilde{w}, s, z) = \Theta(s, z, \chi_1(\tilde{w}, z), \chi_2(\tilde{w}, z)), \\ g_2(\tilde{w}, s, z) = \sqrt{2\chi_1(\tilde{w}, z) + \frac{2(\Theta(s, z, \chi_1(\tilde{w}, z), \chi_2(\tilde{w}, z)) - \varphi(z))^{p+1}}{p+1}} \end{cases} \quad (4.58)$$

есть значение решения системы уравнений характеристик в момент времени s (начинающихся на гиперплоскости $v = 1$).

Наконец, используя операторы $W(z)$ и $W^{-1}(z, s)$, заданные с помощью систем

$$\begin{cases} w = g_1(\tilde{w}, s, z), \\ v = g_2(\tilde{w}, s, z); \end{cases} \quad \begin{cases} s = S(w, v, z), \\ \tilde{w} = G(w, v, z) \end{cases} \quad (4.59)$$

соответственно, получим

$$U_1^{[m]}(z, w, v) = -W(z) \int_0^s W^{-1}(z, s_1) \frac{\partial}{\partial z} U_0^{[m]}(z, w, v) ds_1, \quad m = 0, 1. \quad (4.60)$$

В частности, $U_1^{[m]}(z, w, v) = -W(z)s \equiv -S(w, v, z)$ — член ряда (4.47), отвечающий за особое многообразие, порождаемое точкой $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Пусть $U(\overline{w})$ — частное решение уравнения (4.62), а $V_1(\overline{w}), \dots, V_{k-1}(\overline{w})$ — независимые решения соответствующего (4.62) однородного уравнения

$$g_1(\overline{w}) \frac{\partial V}{\partial w_1} + \dots + g_k(\overline{w}) \frac{\partial V}{\partial w_k} = 0. \quad (4.63)$$

(В качестве $V_1(\overline{w}), \dots, V_{k-1}(\overline{w})$ можно взять $k-1$ независимых интегралов автономной системы

[illegible]

которая, как известно, является характеристической для уравнения (4.63)).

Рассмотрим линейную, относительно $g_1(\overline{w}), \dots, g_k(\overline{w})$, систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(\overline{w}) \frac{\partial U}{\partial w_1} + \dots + g_k(\overline{w}) \frac{\partial U}{\partial w_k} = h(\overline{w}), \\ g_1(\overline{w}) \frac{\partial V_1}{\partial w_1} + \dots + g_k(\overline{w}) \frac{\partial V_1}{\partial w_k} = 0, \\ \\ g_1(\overline{w}) \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_1} + \dots + g_k(\overline{w}) \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_k} = 0. \end{array} \right. \quad (4.64)$$

Так как система функций $\{V_1, \dots, V_{k-1}\}$ независимая, то

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial w_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_k} \end{pmatrix} = k - 1, \quad (4.65)$$

и, значит, в представленной равенством (4.65) матрице имеется $k - 1$ независимых столбцов — пусть, для определенности, это первые $k - 1$ столбцов. Но тогда определитель, составленный следующим образом

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial U}{\partial w_{k-1}} & h \\ \frac{\partial V_1}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial w_{k-1}} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_{k-1}} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{k+1} h \begin{vmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial w_{k-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_{k-1}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

т.е.

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial U}{\partial w_k} & h \\ \frac{\partial V_1}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial w_k} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_k} & 0 \end{pmatrix} = k,$$

а поскольку, система (4.64) совместна, то по теореме Кронекера–Капелли ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы. Следовательно,

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial U}{\partial w_k} \\ \frac{\partial V_1}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial w_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_k} \end{pmatrix} = k$$

и поэтому, ввиду того, что матрица системы (4.64) квадратная, определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial U}{\partial w_k} \\ \frac{\partial V_1}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial w_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial V_{k-1}}{\partial w_k} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.66)$$

Наконец, прибавив к каждой строке определителя (4.66), начиная со второй, первую строку, получим, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial U}{\partial w_k} \\ \frac{\partial(U + V_1)}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial(U + V_1)}{\partial w_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(U + V_{k-1})}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial(U + V_{k-1})}{\partial w_k} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а это и означает независимость системы функций $\{U, U + V_1, \dots, U + V_{k-1}\}$, каждая из которых является решением уравнения (4.62) в некоторой окрестности точки $Q_0^k(w_0)$. Лемма 4.1 доказана.

Далее, восстановим первые два уравнения в цепочке (4.29):

$$f_1 \frac{\partial U_0}{\partial w_1} + \dots + f_k \frac{\partial U_0}{\partial w_k} = 0, \quad (4.67)$$

$$f_1 \frac{\partial U_1}{\partial w_1} + \dots + f_k \frac{\partial U_1}{\partial w_k} = -\frac{\partial U_0}{\partial z}. \quad (4.68)$$

В качестве решений (4.67) возьмем функции $\{\alpha_1(z), \dots, \alpha_k(z)\}$ из алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ такие, что $\alpha_m(z_0) = 0$ и $\alpha'_m(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки z_0 . Перейдем к уравнению (4.68). Поскольку, в соответствии с леммой 4.1, уравнение

$$f_1(z, \bar{w}) \frac{\partial U}{\partial w_1} + \dots + f_k(z, \bar{w}) \frac{\partial U}{\partial w_k} = 1 \quad (4.69)$$

при каждом z из некоторой окрестности точки z_0 (z входит в уравнение (4.69) как параметр) имеет k независимых решений $\tilde{U}_1^{[1]}(z, \bar{w}), \dots, \tilde{U}_1^{[k]}(z, \bar{w})$, причем выберем их так, чтобы они обращались в ноль в точке $Q_0^k(\bar{w}_0)$, то, ввиду линейности уравнения (4.68), функции

$$U_1^{[1]} = -\alpha'_1(z) \tilde{U}_1^{[1]}, \dots, U_1^{[k]} = -\alpha'_k(z) \tilde{U}_1^{[k]}$$

представляют собой систему из k независимых решений этого уравнения. Остальные решения серии уравнений (4.29) определяются по формулам (4.39).

В итоге мы получим k первых интегралов системы (4.61), которые представим следующим образом:

[illegible]

Ясно, что левые части уравнений (4.70), при достаточно малом ε , образуют систему из k независимых функций, принадлежащих алгебре $\mathcal{U}_{z_0 \overline{w}_0}^{k+1}$ и голоморфных в точке $\varepsilon = 0$.

Замечание 4.1. Чтобы получить коммутационные соотношения (и эквивалентные им гомоморфизмы) для линейных отображений

$$\begin{aligned} (A_{f,m}^\varepsilon \alpha_m)(z, \overline{w}) &\equiv \alpha_m(z) - \varepsilon \alpha'_m(z) \widetilde{U}_1^{[m]}(z, \overline{w}) + \varepsilon^2 U_2^{[m]}(z, \overline{w}) + \dots + \\ &+ \varepsilon^n U_n^{[m]}(z, \overline{w}) + \dots \quad m = \overline{1, k} \end{aligned} \quad (4.71)$$

алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{U}_{z_0\overline{w}_0}^{k+1}$, вернемся к условию неравенства нулю правых частей системы (4.61) в некоторой окрестности $\Omega_{z_0\overline{w}_0}^{k+1}$ точки $Q_0^{k+1}(z_0, \overline{w}_0)$. Геометрически это означает, что характеристики, определяемые системой

[illegible]

трансверсальны (не касательны) каждой из гиперплоскостей: Λ_1 с уравнением $w_1 = w_{10}$; ...; Λ_k с уравнением $w_k = w_{k0}$.

Далее, при каждом фиксированном $m \in \{1, \dots, k\}$ для нахождения $U_2^{[m]}, U_3^{[m]}, \dots, U_n^{[m]}, \dots$ будем использовать гиперповерхность $\Lambda_m : w_m = w_{m0}$. Ясно, что тогда, при различных значениях индекса m , будут различными переменные s , действующие в формулах (4.40) (см. также первое равенство в системе (4.36)).

для некоторого набора функций $\alpha_1(z), \dots, \alpha_k(z)$ из алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ таких, что $\alpha_m(z_0) = 0, \alpha'_m(z_0) \neq 0 \quad \forall m = \overline{1, k}$.

Если при этом ряды

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} W_{1n}(z, \eta_1, \dots, \eta_k) \varepsilon^n, \\ & \dots\dots\dots \\ & \sum_{n=0}^{\infty} W_{kn}(z, \eta_1, \dots, \eta_k) \varepsilon^n, \end{aligned} \tag{4.74}$$

представляющие функции (4.73), сходятся равномерно на некотором компакте $T_{z_0} \subset \mathbb{C}_z$, содержащем точку z_0 , при каждом η_m из некоторого неограниченного связного множества $G_m \subset \mathbb{C}_{\eta_m}$, $m = \overline{1, k}$ в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, зависящей от $\eta_1, \dots, \eta_k$, то решение $\overline{w}(z, \varepsilon)$ называется *псевдоголоморфным в глобальном смысле*.

Вначале докажем теорему об обычной псевдоголоморфности (в смысле первой части определения 4.2).

Теорема 4.3. *Решение $\overline{w}(z, \varepsilon)$ задачи Коши (4.61) является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\alpha_1(z), \dots, \alpha_k(z)$ — произвольные функции из алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ (например, $\alpha_1(z) = \dots = \alpha_k(z) = z - z_0$), удовлетворяющие условию: $\alpha_m(z_0) = 0$, $\alpha'_m(z_0) \neq 0$, $m = \overline{1, k}$. Обозначим $\frac{\alpha_m(z)}{\varepsilon}$ через η_m ($m = \overline{1, k}$) и перепишем систему (4.70):

[illegible]

Здесь, для каждого $t \in \{1, \dots, k\}$,

$$V^{[m]}(z, \overline{w}, \varepsilon) = -\varepsilon U_2^{[m]}(z, \overline{w}) - \dots - \varepsilon^{n-1} U_n^{[m]}(z, \overline{w}) - \dots \quad (4.76)$$

— голоморфная, как следует из предыдущего, в точке $(z_0, \overline{w}_0, 0)$ функция.

Так как, эта система выполняется при $z = z_0$, $\bar{w} = \bar{w}_0$, $\eta_1 = \dots = \eta_k = 0$, $\varepsilon = 0$ (последнее равенство нулю можно убрать!) и якобиан

$$\frac{\partial(\alpha'_1(z)\tilde{U}_1^{[1]}(z, \overline{w}), \dots, \alpha'_k(z)\tilde{U}_1^{[k]}(z, \overline{w}))}{\partial(w_1, \dots, w_k)} \Big|_{\substack{z=z_0 \\ \overline{w}=\overline{w}_0}} \neq 0, \quad (4.77)$$

то, по теореме о неявной функции, она имеет решение $\overline{w} = \overline{W}(z, \eta_1, \dots, \eta_k, \varepsilon)$, голоморфное в точке $(z_0, \underbrace{0, \dots, 0}_k, 0)$, что, собственно, и означает псевдоголоморфность в точке $\varepsilon = 0$. Теорема доказана.

Так же, как и в предыдущих двух главах, для нахождения достаточных условий глобальной псевдоголоморфности, рассмотрим систему (4.61) в вещественной области. Для этого перепишем ее, заменив z на x , а $w_1, \dots, w_k$ на $y_1, \dots, y_k$, соответственно:

$$\begin{cases} \varepsilon y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_k), \\ \\ \varepsilon y'_k = f_k(x, y_1, \dots, y_k), \end{cases} \quad (4.78)$$

$$y_1(x_0, \varepsilon) = y_{10}, \dots, y_k(x_0, \varepsilon) = y_{k0}.$$

Будем, при этом, считать малый параметр ε положительным, и $f_m(x, y_1, \dots, y_k) \in \mathcal{U}_{x_0 \bar{y}_0}^{k+1}$, $\forall m = \overline{1, k}$.

Теорема 4.4. *Если существуют функции $\alpha_1(x), \dots, \alpha_k(x)$ из алгебры $\mathcal{A}_{x_0}$ такие, что $\alpha_m(x_0) = 0$, $\alpha'_m(x) < 0 \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \Delta] \quad \forall m = \overline{1, k}$ и система уравнений*

[illegible]

имеет решение

$$\bar{y} = \left(Y_{10} \left(x, \frac{\alpha_1(x)}{\varepsilon}, \dots, \frac{\alpha_k(x)}{\varepsilon} \right), \dots, Y_{k0} \left(x, \frac{\alpha_1(x)}{\varepsilon}, \dots, \frac{\alpha_k(x)}{\varepsilon} \right) \right),$$

ввиду неравенства (4.77) (опять же, записанного в терминах x , $\bar{y}$), будет выполняться неравенство

$$\left. \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_k)}{\partial(y_1, \dots, y_k)} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ x=x^* \\ \overline{y}=\overline{y}^* \\ \overline{\sigma}=\overline{\sigma}^*}} \neq 0. \quad (4.85)$$

Поэтому, для системы (4.83) выполнены все условия теоремы о неявной функции и, следовательно, она имеет решение

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = Y_1(x, \bar{q}, \varepsilon), \\ \\ y_k = Y_k(x, \bar{q}, \varepsilon), \end{array} \right. \quad (4.86)$$

голоморфное в некоторой окрестности точки $Q^*(x^*, \bar{q}^*, 0)$. Из теории функций нескольких комплексных переменных вытекает, что ряды

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} Y_{1n}(x, \bar{q}) \varepsilon^n, \\ & \dots\dots\dots \\ & \sum_{n=0}^{\infty} Y_{kn}(x, \bar{q}) \varepsilon^n, \end{aligned} \tag{4.87}$$

сходятся в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, равномерно на любом компакте из некоторой окрестности $\sigma_{x^*y^*}$ точки $R^*(x^*, \bar{q}^*)$.

Далее, выберем близкое к нулю $q_0 > 0$, покроем параллелепипед

$$\Pi_{x\bar{q}} = [x_0, x_0 + \Delta] \times [q_0 \leq q_1 \leq 1] \times \dots \times [q_0 \leq q_k \leq 1]$$

окрестностями $\{\sigma_{x^*\bar{q}^*}\}$ и выберем конечное подпокрытие $\{\sigma_{x^*\bar{q}^*}\}_1^N$. Тогда ряды (4.87) будут сходиться в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (наименьшей, из соответствующих конечному подпокрытию) равномерно на $\Pi_{x\bar{q}^*}$, что и означает глобальную псевдоголоморфность $\bar{y}(x, \varepsilon) = (y_1(x, \varepsilon), \dots, y_k(x, \varepsilon))$. Теорема доказана.

Замечание 4.2. Если $\forall m \in \{1, \dots, k\}$ кривая $q_m = \exp \left\{ \frac{\alpha_m(x)}{\varepsilon} \right\}$ при заданном фиксированном $\varepsilon > 0$, целиком принадлежит прямоугольнику

$\Pi_{xq_m} = [x_0, x_0 + \Delta] \times [q_0 \leq q_m \leq 1]$, то вектор-функция

$$\bar{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Y}_n \left(x, e^{\frac{\alpha_1(x)}{\varepsilon}}, \dots, e^{\frac{\alpha_k(x)}{\varepsilon}} \right) \varepsilon^n, \quad (4.88)$$

где

$$\overline{Y}_n = \{Y_{1n}, \dots, Y_{kn}\},$$

является точным решением задачи Коши (4.78) на всем отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$, а в противном случае — на некотором отрезке $[x_0, \tilde{x}] \subset [x_0, x_0 + \Delta]$. При этом, алгоритм построения ряда (4.88) такой же, как и в § 3.4 и естественным образом вытекает из теоремы о неявной функции. Что же касается точности приближения частных сумм ряда (4.88) к $\overline{y}(x, \varepsilon)$, то, в соответствии с концепцией псевдоаналитического решения, выдвинутой в монографии [48], при фиксированном ε в сингулярностях, имеем

$$\bar{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^p \bar{Y}_n \left(x, e^{\frac{\alpha_1(x)}{\varepsilon^{**}}}, \dots, e^{\frac{\alpha_k(x)}{\varepsilon^{**}}} \right) \varepsilon^n + \bar{\bar{O}}(\varepsilon^p), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (4.89)$$

С другой стороны, поскольку ряд (4.88) сходится при фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$, то

$$\bar{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^p \bar{Y}_n \left(x, e^{\frac{\alpha_1(x)}{\varepsilon}}, \dots, e^{\frac{\alpha_k(x)}{\varepsilon}} \right) \varepsilon^n + r_p(x, \varepsilon) \quad (4.90)$$

И

$$\lim_{p \rightarrow \infty} r_p(x, \varepsilon) = 0,$$

равномерно на некотором отрезке $[x_0, \tilde{x}]$. В любом случае, метод голоморфной регуляризации позволяет получить решение $\overline{y}(x, \varepsilon)$ системы (4.78) с любой наперед заданной степенью точности, если выполнены условия теоремы 4.4.

Замечание 4.3. Ясно, что условия теоремы 4.4 выполнены, если автономная (при каждом фиксированном $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$) система

[illegible]

имеет положительно устойчивые по Лагранжу решения, т.е. решения $\bar{y}(x, s)$, равномерно по $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$ ограниченные при $s \rightarrow +\infty$, с начальными данными $\bar{y}(x, 0) = \bar{y}_0$, если только $\bar{y}_0$ принадлежит некоторому множеству $\Omega_{0\bar{f}} \subset \mathbb{R}^k$. Поэтому теорему 4.4 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4.4'. *Если система (4.91) имеет положительно устойчивые по Лагранжу решения $\bar{y}(x, s)$ равномерно на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$, то задача Коши (4.78), при $\bar{y}_0 \in \Omega_{0\bar{f}}$, имеет псевдоголоморфное в глобальном смысле решение.*

Замечание 4.4. Если же в определении глобальной псевдоголоморфности потребовать ограниченность $W_{10}, \dots, W_{k0}$ на множестве $G = G_1 \times \dots \times G_k$ (см. (4.74)) или, в вещественном случае, — ограниченности $Y_{10}, \dots, Y_{k0}$ (см. формулировку теоремы 4.3), то условие положительной устойчивости по Лагранжу становится также и необходимым для существования псевдоголоморфных в глобальном смысле решений.

Замечание 4.5. Положительная устойчивость по Лагранжу может быть следствием асимптотической устойчивости по Ляпунову, а последняя, как известно, является основой предельного перехода. Для того, чтобы изучить вопрос о том, как из псевдоголоморфности вытекает предельный переход, сформулируем теорему А.Н. Тихонова [81], адаптированную (см. [76]) к системе

$$\varepsilon \frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{F}(x, \bar{y}), \quad \bar{y}(x_0, \varepsilon) = \bar{y}_0 \quad (4.92)$$

(мы намеренно заменили $\bar{f}$ на $\bar{F}$, чтобы подчеркнуть более общий характер систем вида (4.92)).

Определение 4.3. а) Алгебраическая система уравнений

$$\bar{F}(x, \bar{y}) = 0, \quad x \in [x_0, x_0 + \Delta], \quad (4.93)$$

полученная из (4.92) при $\varepsilon = 0$, называется *вырожденной* (или *предельной*) *системой*.

б) Корень (точнее, решение) $\bar{y} = \bar{\varphi}(x)$ уравнения (4.93) называется *изолированным корнем вырожденной системы*, если в некоторой

окрестности $\omega = \{\bar{y} : \|\bar{y} - \bar{\varphi}(x)\| < \delta, x \in [x_0, x_0 + \Delta]\}$ она не имеет других корней.

в) Система

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = \bar{F}(x, \bar{y}), \quad \bar{y}(s, x) \Big|_{s=0} = y_0, \quad s \geq 0, \quad (4.94)$$

где $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$, рассматривается как параметр, называется *присоединенной системой*, а система

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = \bar{F}(x_0, \bar{y}), \quad \bar{y}(0) = y_0, \quad s \geq 0, \quad (4.95)$$

— *начальной присоединенной системой*.

Заметим, что вырожденная система (4.93) может иметь несколько изолированных корней. Выбирается так называемый устойчивый корень, к которому должны стягиваться при $s \rightarrow +\infty$ все решения присоединенной системы (4.94), близкие в начальный момент $s = 0$ к устойчивому корню.

Теперь можно сформулировать теорему о предельном переходе.

Теорема Тихонова. Пусть для системы (4.92) выполнены условия:

- 1) функция $\bar{F}(x, \bar{y}) \in C^1(G)$, $G = \{(x, \bar{y}) : \|\bar{y}\| \leq H, x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta\}$;
- 2) вырожденная система (4.93) имеет изолированный корень $\bar{y} = \bar{\varphi}(x)$, определенный на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$;

3) точка покоя $\bar{y} = \bar{\varphi}(x)$ присоединенной системы (4.94) является асимптотически устойчивой по Ляпунову при $s \rightarrow +\infty$ (равномерно по $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$);

4) точка $\bar{y}_0$ такова, что решение $\bar{y}(s)$ начальной присоединенной системы (4.95) существует при всех $s \geq 0$ и $\bar{y}(s) \rightarrow \bar{\varphi}(x_0)$ при $s \rightarrow +\infty$ (в этом случае говорят, что точка $\bar{y}_0$ принадлежит области влияния точки покоя $\bar{\varphi}(x_0)$). Тогда, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$) система (4.92) имеет единственное решение $\bar{y}(x, \varepsilon)$, определенное на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \bar{y}(x, \varepsilon) = \bar{\varphi}(x) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \Delta]. \quad (4.96)$$

Обозначим через $\lambda_j(x)$ — собственные значения матрицы

$$B(x) = \frac{\partial \bar{F}(x, \bar{\varphi}(x))}{\partial \bar{y}}, \quad (4.97)$$

$j = \overline{1, p}$. Условие 3) теоремы Тихонова будет заведомо выполненным, если спектр матрицы $B(x)$ (ее называют матрицей первой вариации функции $\overline{F}(x, \overline{y})$ на предельном решении $\overline{y} = \overline{\varphi}(x)$), удовлетворяет условиям:

$$3)' \operatorname{Re} \lambda_j(x) < 0 \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \Delta], \quad j = \overline{1, p} \leq k.$$

Это следует из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Таким образом, из выше сказанного, можно сделать следующий вывод: при выполнении условий теоремы Тихонова (вместе с условиями, налагаемыми на правые части уравнений системы (4.61)), задача Коши для этой системы имеет псевдоголоморфное в глобальном смысле решение $\overline{y}(x, \varepsilon)$ такое, что для ряда (4.88) выполнен предельный переход:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{Y}_n(x, e^{\frac{\alpha_1(x)}{\varepsilon}}, \dots, e^{\frac{\alpha_k(x)}{\varepsilon}}) \varepsilon^n = \overline{\varphi}(x), \quad (4.98)$$

для всех $x \in (x_0, \tilde{x}] \subset (x_0, x_0 + \Delta]$, если $\overline{\varphi}(x)$ является решением предельной системы $\overline{f}(x, \overline{y}) = 0$. То, что промежуток $(x_0, \tilde{x}]$ может оказаться меньше промежутка $(x_0, x_0 + \Delta]$ никоим образом не вступает в противоречие с теоремой Тихонова: в формуле (4.98) речь идет не о решении $\overline{y}(x, \varepsilon)$, а о ряде по степеням ε , его представляющем.

В следующем параграфе метод голоморфной регуляризации будет применен к решению линейной системы.

§ 4.5. Голоморфная регуляризация линейных систем

Рассмотрим в вещественной области линейную систему

$$\varepsilon \frac{d\overline{y}}{dx} = A(x)\overline{y} \quad (4.99)$$

с начальным условием

$$\overline{y}(x_0, \varepsilon) = \overline{y}_0. \quad (4.100)$$

Здесь $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$ — матрица, размером $k \times k$, с элементами, допускающими голоморфное продолжение на круг $\mathcal{K}_{x_0}^{\tau_0} = \{z : |z - x_0| < \tau_0\}$, различные собственные значения $\lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x)$ которой вещественнозначны

при вещественных $x \in \mathcal{K}_{x_0}^{\tau_0}$ и допускают голоморфное продолжение на этот же круг. Пусть соответствующие им собственные векторы $\{\bar{b}_p(x)\}_{p=1}^k$ и векторы $\{\bar{b}_p^*(x)\}_{p=1}^k$, образующие биортогональную систему, также обладают этим свойством. Обозначим через $e_m^* = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ — вектор-строку, у которой единица находится на m -м месте, а остальные элементы нули. Заметим, что $A^*(x)\bar{b}_p^*(x) = \lambda_p(x)\bar{b}_p^*(x)$, $p = \overline{1, k}$.

В соответствии с методом голоморфной регуляризации, составим уравнения интегралов системы (4.99) в окрестности точки $P_0(x_0, \bar{y}_0) \in \mathbb{R}^{k+1}$:

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} + \sum_{m=1}^k \langle e_m^*, A(x)\bar{y} \rangle \frac{\partial U}{\partial y_m} = 0, \quad (4.101)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$. Решение уравнения (4.101) будем искать в виде ряда по степеням ε :

$$U(x, \bar{y}, \varepsilon) = U_0(x, \bar{y}) + \varepsilon U_1(x, \bar{y}) + \dots + \varepsilon^n U_n(x, \bar{y}) + \dots, \quad (4.102)$$

для коэффициентов $U_n(x, \bar{y})$ которого имеем:

$$\sum_{m=1}^k \langle e_m^*, A(x)\bar{y} \rangle \frac{\partial U_0}{\partial y_m} = 0, \quad (4.103_0)$$

$$\sum_{m=1}^k \langle e_m^*, A(x)\bar{y} \rangle \frac{\partial U_1}{\partial y_m} = -\frac{\partial U_0}{\partial x}, \quad (4.103_1)$$

$$\dots \dots \dots \sum_{m=1}^k \langle e_m^*, A(x)\bar{y} \rangle \frac{\partial U_n}{\partial y_m} = -\frac{\partial U_{n-1}}{\partial x}, \quad (4.103_n) \dots \dots \dots$$

Обозначим через

$$L^{(k)} = \sum_{m=1}^k \langle e_m^*, A(x)\bar{y} \rangle \frac{\partial}{\partial y_m} \quad (4.104)$$

линейный дифференциальный оператор первого порядка в частных производных. Тогда уравнения серии (4.103) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
L^{(k)}U_0 &= 0, \\
L^{(k)}U_1 &= -\frac{\partial U_0}{\partial x}, \\
&\dots\dots\dots \\
L^{(k)}U_n &= -\frac{\partial U_{n-1}}{\partial x}, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{4.103'}$$

Для построения k независимых решений уравнения (4.101) (k независимых интегралов исходной системы) будем последовательно полагать U_0 быть равным

$$\int_{x_0}^x \lambda_p(t) dt, \quad p = \overline{1, k}. \tag{4.105}$$

Докажем, что функция

$$U_1^{[p]}(x, \bar{y}) = -\ln |\langle \bar{b}_p^*(x), \bar{y} \rangle|, \tag{4.106}$$

при каждом $p = \overline{1, k}$, является решением уравнения

$$L^{(k)}U_1^{[p]} = -\lambda_p(x). \tag{4.107}$$

Действительно, при фиксированном p :

$$\begin{aligned}
L^{(k)}U_1^{[p]} &= -\sum_{m=1}^k \frac{\langle e_m^*, A(x)\bar{y} \rangle \langle e_m^*, \bar{b}_p^*(x) \rangle}{\langle \bar{b}_p^*(x), \bar{y} \rangle} = \\
&= -\frac{1}{\langle \bar{b}_p^*(x), \bar{y} \rangle} \sum_{m=1}^k \langle e_m^*, A(x)\bar{y} \rangle \langle e_m^*, \bar{b}_p^*(x) \rangle = \\
&= -\frac{1}{\langle \bar{b}_p^*(x), \bar{y} \rangle} \sum_{m=1}^k \langle e_m^*, \bar{y} \rangle \langle e_m^*, A^*(x)\bar{b}_p^*(x) \rangle = \\
&= -\frac{1}{\langle \bar{b}_p^*(x), \bar{y} \rangle} \sum_{m=1}^k \langle e_m^*, \bar{y} \rangle \langle e_m^*, \bar{b}_p^*(x) \rangle \lambda_p(x) = \\
&= -\frac{1}{\langle \bar{b}_p^*(x), \bar{y} \rangle} \lambda_p(x) \langle \bar{y}, \bar{b}_p^*(x) \rangle = -\lambda_p(x),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теперь покажем независимость системы функций $\{U_1^{[p]}(x, \bar{y})\}_{p=1}^k$.
Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(U_1^{[1]}(x, \bar{y}), \dots, U_1^{[k]}(x, \bar{y}))}{\partial(y_1, \dots, y_k)} &= \begin{vmatrix} \frac{\langle e_1^*, \bar{b}_1^* \rangle}{\langle \bar{b}_1^*, \bar{y} \rangle} & \frac{\langle e_2^*, \bar{b}_1^* \rangle}{\langle \bar{b}_1^*, \bar{y} \rangle} & \dots & \frac{\langle e_k^*, \bar{b}_1^* \rangle}{\langle \bar{b}_1^*, \bar{y} \rangle} \\ \frac{\langle e_1^*, \bar{b}_2^* \rangle}{\langle \bar{b}_2^*, \bar{y} \rangle} & \frac{\langle e_2^*, \bar{b}_2^* \rangle}{\langle \bar{b}_2^*, \bar{y} \rangle} & \dots & \frac{\langle e_k^*, \bar{b}_2^* \rangle}{\langle \bar{b}_2^*, \bar{y} \rangle} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\langle e_1^*, \bar{b}_k^* \rangle}{\langle \bar{b}_k^*, \bar{y} \rangle} & \frac{\langle e_2^*, \bar{b}_k^* \rangle}{\langle \bar{b}_k^*, \bar{y} \rangle} & \dots & \frac{\langle e_k^*, \bar{b}_k^* \rangle}{\langle \bar{b}_k^*, \bar{y} \rangle} \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{\langle \bar{b}_1^*, \bar{y} \rangle \dots \langle \bar{b}_k^*, \bar{y} \rangle} \det(B^*)^T \neq 0, \end{aligned} \quad (4.109)$$

где B^* — матрица со столбцами $\bar{b}_1^*(x), \dots, \bar{b}_k^*(x)$. Таким образом, независимость рассматриваемой системы функций, доказана.

Для решения уравнений (4.103_n) при $n = 2, 3, \dots$, следуя методике, изложенной в § 4.2, проведем через точку $\bar{y}_0$ гиперплоскость $\Lambda : y_k = y_{k0}$, предполагая (не ограничивая общности), что характеристики, проходящие через нее, трансверсальны к ней, и зададим на ней координаты $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{k-1})$.

Запишем систему уравнений характеристик:

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = A(x)\bar{y}, \quad (4.110)$$

в которой x выступает в роли параметра, а s — независимой переменной. Общее решение такой системы общеизвестно и задается формулой

$$\bar{y} = B(x)e^{sD(x)}\bar{C}, \quad (4.111)$$

где $B(x) = \|\bar{b}_p(x)\|_{p=1}^k$ — матрица, столбцами которой служат собственные векторы оператора $A(x)$; матрица $e^{sD(x)}$ — диагональная и имеет вид:

$$e^{sD(x)} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(x)s} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_k(x)s} \end{pmatrix}, \quad (4.112)$$

$\bar{C}$ — столбец произвольных констант.

Пусть, $\bar{g}(s, \bar{y}, x)$ — значения решения системы (4.110), с начальным условием $\bar{g}(0, \bar{y}, x) = \bar{y}$ на гиперплоскости Λ , в момент времени s . В первую очередь мы должны удовлетворить указанному начальному условию. Для этого, в левую часть равенства (4.111) подставим столбец

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_{k-1} \\ y_{0k} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \bar{y} \\ y_{0k} \end{pmatrix},$$

а в правой положим $s = 0$. Тогда получим, что $\bar{C} = B^{-1}(x)\bar{Y}$. Следовательно,

$$\bar{g}(s, \bar{y}, x) = B(x)e^{sD(x)}B^{-1}(x)\bar{Y}. \quad (4.113)$$

Далее, рассмотрим систему, записанную в векторной форме:

$$B(x)e^{sD(x)}B^{-1}(x)\bar{Y} = \bar{y}, \quad (4.114)$$

из которой вытекает, как уравнение для определения s :

$$\langle e_k^*, B(x)e^{-sD(x)}B^{-1}(x)\bar{y} \rangle = y_{0k}, \quad (4.115)$$

так и формулы для координат $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{k-1}$:

$$\tilde{y}_m = \langle e_m^*, B(x)e^{-sD(x)}B^{-1}(x)\bar{y} \rangle, \quad m = 1, \dots, k-1. \quad (4.116)$$

Разрешимость относительно s уравнения (4.115) обеспечивается глобальным характером теоремы Коши существования и единственности решений линейных систем, поскольку уравнение (4.114) при фиксированном $\bar{y} \in \Lambda$ описывает диффеоморфизм между полуосью $0 \leq s < \infty$ и характеристикой, соответствующей $\bar{y} : s \leftrightarrow \bar{y}$.

Таким образом, потребовав, чтобы $U_1^{[p]}(x, \bar{y}_0) = 0$ ($p = \overline{1, k}$), получим k независимых интегралов:

$$\begin{aligned} U^{[p]}(x, \bar{y}, \varepsilon) = & \int_{x_0}^x \lambda_p(t) dt - \varepsilon (\ln |\langle \bar{b}_p^*(x), \bar{y} \rangle| - \ln |\langle \bar{b}_p^*(x), \bar{y}_0 \rangle|) + \\ & + \varepsilon^2 \left[\int_0^s \frac{\partial}{\partial x} (\ln |\langle \bar{b}_p^*(x), \bar{y} \rangle| - \ln |\langle \bar{b}_p^*(x), \bar{y}_0 \rangle|) \Big|_{\bar{y}=\bar{g}(s_1, \bar{y}, x)} ds_1 \right] \Big|_{\substack{s=S(x, \bar{y}) \\ \bar{y}=G(x, \bar{y})}} - \dots, \\ & p = \overline{1, k}. \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$U^{[p]}(x, \bar{y}, \varepsilon) = 0, \quad p = \overline{1, k}, \quad (4.118)$$

неявным образом определяют решение $\bar{y}(x, \varepsilon)$ задачи Коши (4.99), (4.100). Ясно, что глобальная псевдоголоморфность, вместе с предельным переходом, обеспечивается неравенствами $\lambda_p(x) < 0$, $p = \overline{1, k}$ — условием асимптотической устойчивости решений системы (4.110) (см. замечание 4.6).

Замечание 4.7. Уравнение (4.115) является трансцендентным, что может затруднить использование метода голоморфной регуляризации, поэтому гиперплоскость Λ желательно выбрать такую, чтобы в этом уравнении оставалась только одна экспонента (см. примеры ниже).

Пример 4.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \varepsilon y_1' = -(e^x + 1)y_1 + 2e^{-x}y_2, \\ \varepsilon y_2' = e^{2x}y_1 - 3y_2, \end{cases} \quad (4.119)$$

с начальными условиями: $y_1(0, \varepsilon) = 1$, $y_2(0, \varepsilon) = 0$.

Здесь матрица системы

$$A(x) = \begin{pmatrix} -(e^x + 1) & 2e^{-x} \\ e^{2x} & -3 \end{pmatrix}, \quad (4.120)$$

имеет собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3 - e^x$, соответствующие им собственные векторы

$$\bar{b}_1(x) = \begin{pmatrix} 2e^{-x} \\ e^x \end{pmatrix}; \quad \bar{b}_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ e^x \end{pmatrix},$$

и векторы, образующие биортогонально сопряженную систему

$$\bar{b}_1^*(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}_2^*(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение интегралов данной системы имеет вид:

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} + (-(e^x + 1)y_1 + 2e^{-x}y_2) \frac{\partial U}{\partial y_1} + (e^{2x}y_1 - 3y_2) \frac{\partial U}{\partial y_2} = 0. \quad (4.121)$$

Пусть $U_0^{[1]} = -x$, $U_0^{[2]} = -3x - e^x + 1$. Запишем уравнение для определения $U_1(x, y_1, y_2)$:

$$(-(e^x + 1)y_1 + 2e^{-x}y_2)\frac{\partial U_1}{\partial y_1} + (e^{2x}y_1 - 3y_2)\frac{\partial U_1}{\partial y_2} = -\frac{\partial U_0}{\partial x}. \quad (4.122)$$

По формуле (4.106) найдем $U_1(x, y_1, y_2)$:

$$\begin{aligned} U_1^{[1]}(x, y_1, y_2) &= -\ln(e^x y_1 + y_2), \\ U_1^{[2]}(x, y_1, y_2) &= -\ln(e^{2x} y_1 - 2y_2). \end{aligned} \quad (4.123)$$

В частности (см. формулу (4.87))

$$\begin{aligned} Y_{10}(x, \varepsilon) &= \frac{2e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{3x-e^x+1}{\varepsilon}}}{2e^x + e^{2x}}, \\ Y_{20}(x, \varepsilon) &= \frac{e^{x-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{3x-e^x+1}{\varepsilon}}}{e^x + 2}. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Далее, имеем уравнение для определения $U_2(x, y_1, y_2)$:

$$(-(e^x + 1)y_1 + 2e^{-x}y_2)\frac{\partial U_2}{\partial y_1} + (e^{2x}y_1 - 3y_2)\frac{\partial U_2}{\partial y_2} = -\frac{\partial U_1}{\partial x}. \quad (4.125)$$

Чтобы его решить по схеме, изложенной в этом параграфе, составим систему уравнений характеристик

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{ds} = -(e^x + 1)y_1 + 2e^{-x}y_2, \\ \frac{dy_2}{ds} = -e^{2x}y_1 - 3y_2 \end{cases} \quad (4.126)$$

и выберем начальную прямую $\Lambda : y_1 = 2e^{-2x}y_2 + 1$ (см. замечание 4.7). Если обозначить координату Λ через $\tilde{y}_2$, то (см. уравнение (4.113)), получим значение решения системы уравнений характеристик в момент времени s :

$$\begin{pmatrix} g_1(s, \tilde{y}_2, x) \\ g_2(s, \tilde{y}_2, x) \end{pmatrix} = \frac{(2e^{-x} + 1)\tilde{y}_2 + e^x}{e^x + 2} \begin{pmatrix} 2e^{-x} \\ e^x \end{pmatrix} e^{-xs} - \frac{e^x}{e^x + 2} \begin{pmatrix} -1 \\ e^x \end{pmatrix} e^{-(3+e^x)s}. \quad (4.127)$$

Отсюда,

$$s = \frac{1}{e^x + 3} \ln(y_1 - 2y_2 e^{-2x}) \equiv S(x, y_1, y_2), \quad (4.128)$$

и

$$\tilde{y}_2 = \frac{y_1 e^x + y_2 - e^x}{2e^{-x} + 1} \equiv G(x, y_1, y_2). \quad (4.129)$$

В итоге, в соответствии с формулой (4.117), построим ряд для $U^{[p]}(x, y_1, y_2, \varepsilon)$ при $p = 1, 2$, а затем найдем с заданной точностью псевдоголоморфное в глобальном смысле (так как $\lambda_p(x) < 0$, $p = 1, 2$) решение поставленной задачи Коши.

Пример 4.2. Рассмотрим задачу Коши для сильно нелинейной сингулярно возмущенной системы:

$$\begin{cases} \varepsilon y_1' = 8e^{-e^x y_1} - 2e^{e^x(y_2 - y_1)} - 13, \\ \varepsilon y_2' = 4e^{-e^x y_2} - 3e^{e^x(y_1 - y_2)} - 8, \\ y_1(0, \varepsilon) = y_2(0, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (4.130)$$

В соответствии с методом голоморфной регуляризации, перейдем к уравнению интегралов этой системы:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} + (8e^{-e^x y_1} - 2e^{e^x(y_2 - y_1)} - 13) \frac{\partial U}{\partial y_1} + \\ + (4e^{-e^x y_2} - 3e^{e^x(y_1 - y_2)} - 8) \frac{\partial U}{\partial y_2} = 0. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Пусть решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$U(x, y_1, y_2, \varepsilon) = U_0(x) + \varepsilon U_1(x, y_1, y_2) + \varepsilon^2 U_2(x, y_1, y_2) + \dots \quad (4.132)$$

Тогда $U_1(x, y_1, y_2)$ определяется из уравнения

$$(8e^{-e^x y_1} - 2e^{e^x(y_2 - y_1)} - 13) \frac{\partial U_1}{\partial y_1} + (4e^{-e^x y_2} - 3e^{e^x(y_1 - y_2)} - 8) \frac{\partial U_1}{\partial y_2} = -\frac{\partial U_0}{\partial x}. \quad (4.133)$$

Запишем соответствующую уравнению (4.133) систему уравнений характеристик:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{ds} = 8e^{-e^x y_1} - 2e^{e^x(y_2 - y_1)} - 13, \\ \frac{dy_2}{ds} = 4e^{-e^x y_2} - 3e^{e^x(y_1 - y_2)} - 8, \end{cases} \quad (4.134)$$

которая, как нетрудно видеть, сводится к линейной автономной (при каждом x) системе относительно $z_1 = e^{e^x y_1}$ и $z_2 = e^{e^x y_2}$, причем $r = e^x s$ — новая независимая переменная:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dr} = -13z_1 - 2z_2 + 8, \\ \frac{dz_2}{dr} = -3z_1 - 8z_2 + 14. \end{cases} \quad (4.135)$$

Матрица этой системы

$$A = \begin{pmatrix} -13 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

имеет отрицательные собственные значения $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = -14$, что гарантирует глобальную псевдоголоморфность решения задачи Коши (4.130). В частности, если $U_0^{[1]}(x) = -7(e^x - 1)$, $U_0^{[2]}(x) = -14(e^x - 1)$, то

$$\begin{aligned} Y_{10}(x, \varepsilon) &= e^{-x} \ln \frac{4 + 4e^{-\frac{14(e^x-1)}{\varepsilon}} - e^{-\frac{7(e^x-1)}{\varepsilon}}}{7}, \\ Y_{20}(x, \varepsilon) &= e^{-x} \ln \frac{3e^{-\frac{7(e^x-1)}{\varepsilon}} + 2e^{-\frac{14(e^x-1)}{\varepsilon}} + 2}{7}. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Из формул (4.136) видно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \begin{pmatrix} Y_{10}(x, \varepsilon) \\ Y_{20}(x, \varepsilon) \end{pmatrix} = e^{-x} \begin{pmatrix} \ln(4/7) \\ \ln(2/7) \end{pmatrix}, \quad (4.137)$$

т.е. $\bar{y}(x, \varepsilon)$ стремится к решению предельной задачи (при $\varepsilon = 0$ в (4.130)) на некотором промежутке $(0, \tilde{x}]$.

Замечание 4.8. В главе I рассматривались условия обычной сходимости регуляризованных рядов для решений сингулярно возмущенных систем (см. пример на с. 35 и пример на с. 49). Поскольку в этих рядах экспоненты, описывающие существенно особые многообразия, порождаемые точкой $\varepsilon = 0$, присутствуют в виде сомножителей, то в этом случае можно говорить о существенно особых многообразиях линейного типа (см. § 2.6). Если же в приведенных сейчас примерах вычислить $\bar{Y}_n(x, \varepsilon)$ при $n \geq 2$, то можно увидеть, что эти вектор-функции зависят

от сингулярных экспонент более сложным, нелинейным образом и, значит, здесь речь идет о многообразиях нелинейного типа.

Итак, выше рассмотрен метод голоморфной регуляризации систем дифференциальных уравнений и, теперь, мы переходим к сингулярно возмущенным уравнениям в банаховом пространстве.

§ 4.6. Интегралы дифференциальных уравнений в банаховых пространствах

Рассмотрим в вещественном банаховом пространстве E уравнение

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y) \quad (4.138)$$

с нелинейным оператором F , голоморфным по обоим переменным (см. [86]) на множестве

$$\overline{\Omega}^0 = [t_0, t_0 + \Delta] \times \overline{\Omega}_y, \quad (4.139)$$

где $\overline{\Omega}_y$ — замыкание ограниченной области $\Omega_y \subset E$. Как известно (см. [11, 86]), в этих условиях данное уравнение на некотором отрезке $[t_0, t_0 + \Delta_1]$ ($\Delta_1 \leq \Delta$) имеет единственное решение $y(t)$, удовлетворяющее начальному условию

$$y(t_0) = y_0 \in \Omega_y, \quad (4.140)$$

остающееся на указанном отрезке в $\overline{\Omega}_y$.

Введем понятие интеграла дифференциального уравнения (4.138).

Определение 4.4. Нелинейный оператор $U(t, y)$ называется *интегралом уравнения* (4.138) в области $\Omega \subset \overline{\Omega}^0$, если он принимает постоянное значение из E на любом решении $y(t)$ задачи Коши для этого уравнения при условии, что начальная точка $(\tilde{t}_0, y_0) \in \Omega$.

В первую очередь докажем существование интегралов уравнения (4.138). Действительно, это уравнение, вместе с начальным условием $y(\tilde{t}_0) = y_0 \in \Omega_y$, имеет единственное (при каждом фиксированном y_0) решение $y = Y(t, y_0)$ такое, что

$$Y(\tilde{t}_0, y_0) = y_0. \quad (4.141)$$

Из равенства (4.141) следует, что

$$\frac{\partial Y(\tilde{t}_0, y_0)}{\partial y_0} = \mathcal{J}, \quad (4.142)$$

где $\mathcal{J}$ — тождественный оператор. По теореме о неявной функции, уравнение $y = Y(t, y_0)$ однозначно разрешимо относительно y_0 в некоторой окрестности точки $(\tilde{t}_0, y_0)$:

$$y_0 = U(t, y), \quad (4.143)$$

Таким образом, если зафиксировать y_0 в равенстве (4.143), то $U(t, y)$ будет принимать постоянное значение (равное y_0) на решении $y(t)$ соответствующей задачи Коши и существование интегралов доказано.

Сформулируем и докажем необходимое и достаточное условие того, что оператор $U(t, y)$ является интегралом уравнения (4.138).

Лемма 4.2. *Всякий интеграл $U(t, y)$ уравнения (4.138) в некоторой области Ω удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y} F(t, y) = 0, \quad (4.144)$$

и, наоборот, любой оператор $U(t, y)$, удовлетворяющий уравнению (4.144), является интегралом уравнения (4.138).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Имеем, по формуле производной сложной функции в банаховом пространстве [86] и в силу уравнения (4.138):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y} F(t, y) = 0, \quad (4.145)$$

$\forall (t, y) \in \Omega$, если $U(t, y)$ — интеграл уравнения (4.138) в области Ω .

Пусть теперь $U(t, y)$ — оператор, удовлетворяющий в области Ω уравнению (4.145), а $y(t)$ — решение уравнения (4.138) с начальным условием $y(\tilde{t}_0) = y_0$ таким, что $(\tilde{t}_0, y_0) \in \Omega$. Очевидно, что интегральная кривая $y = y(t)$ принадлежит области Ω , т.е. верно тождество

$$\frac{\partial U(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial U(t, y(t))}{\partial y} F(t, y(t)) \equiv 0, \quad (4.146)$$

на некотором отрезке $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \Delta_2] \subset [t_0, t_0 + \Delta]$.

С другой стороны,

$$F(t, y(t)) = \frac{dy(t)}{dt} \quad \forall t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \Delta_2], \quad (4.147)$$

поэтому равенство (4.146) можно представить так:

$$\frac{\partial U(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial U(t, y(t))}{\partial y} \frac{dy}{dt} \equiv 0 \quad \forall t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \Delta_2], \quad (4.148)$$

Но левая часть уравнения (4.148) есть ни что иное, как величина полной производной $U(t, y(t))$ по t на решении $y(t)$ уравнения (4.138).

Следовательно,

$$\frac{dU(t, y(t))}{dt} = 0, \quad (4.149)$$

т.е. $U(t, y(t))$ принимает постоянное значение на решении $y(t)$, ввиду произвольности которого, $U(t, y)$ является интегралом дифференциального уравнения (4.138). Лемма доказана.

Замечание 4.9. Аналогично рассуждая, можно доказать, что в случае автономного уравнения

$$\frac{dy}{ds} = F(y), \quad (4.150)$$

любой интеграл $V(y)$ (независящий от s) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial y} F(y) = 0, \quad (4.151)$$

и, наоборот, если оператор $V(y)$ удовлетворяет уравнению (4.151) в области $\tilde{\Omega}_y \subset \Omega_y$, то он является интегралом уравнения (4.150) (независящим от s).

В дальнейшем нам понадобится формула решения уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial y} F(y) = b(y), \quad (4.152)$$

где $b(y)$ — оператор, действующий в E , аналогичная формуле (4.26).

Предположим, что линейный непрерывный функционал $e^* \in E^*$ таков, что $\langle e^*, F(y) \rangle \neq 0 \quad \forall y \in \tilde{\Omega}_y$. В силу единственности это означает,

что для каждого $y \in \tilde{\Omega}_y$ существует и единственна точка $\tilde{y} \in \Lambda$ — гиперповерхности в E , заданной уравнением

$$\langle e^*, y \rangle = \text{const}, \quad (4.153)$$

в которой характеристика (фазовая траектория уравнения (4.150)), проходящая через точку y , пересекает Λ . Итак, как следует из уравнения характеристик (4.150), рассматриваемое уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{ds} = b(y(s)), \quad (4.154)$$

или

$$\frac{dV}{ds} = b(y(s)). \quad (4.155)$$

Будем искать решение уравнения (4.155), обращающееся в ноль на гиперплоскости Λ . Тогда, в результате интегрирования, получим:

$$V(g(\tilde{y}, s)) = \int_0^s b(g(\tilde{y}, s_1)) ds_1. \quad (4.156)$$

В этой формуле $g(\tilde{y}, s)$ — значение решения уравнения характеристик (4.150) (с начальным условием $g(\tilde{y}, 0) = \tilde{y}$ на начальной поверхности Λ , с введенными там координатами $\tilde{y}$) в момент времени s . Ясно, что уравнение

$$y = g(\tilde{y}, s), \quad (4.157)$$

при каждом фиксированном $y \in \tilde{\Omega}_y$, однозначно определяет $\tilde{y} \in \Lambda$ и $s \geq 0$:

$$\begin{cases} \tilde{y} = G(y), \\ s = S(y). \end{cases} \quad (4.158)$$

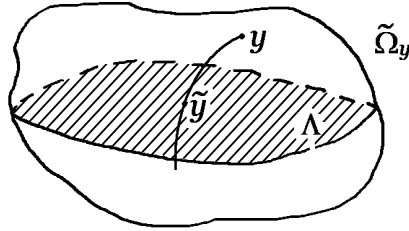


Рис. 4.1

Рис. 4.1 иллюстрирует вышесказанное: вначале, по заданному y , однозначно определяется $\tilde{y} \in \Lambda$, так как через каждую точку y проходит ровно одна характеристика. Далее, имея решение $y(s)$ задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{ds} = F(g), \\ y(0) = \tilde{y}, \end{cases} \quad (4.159)$$

единственным образом определяется момент s такой, что $y(s) = y$.

Теперь перейдем к задаче Коши для сингулярно возмущенного уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dt} &= F(t, y); \\ y(t_0, \varepsilon) &= y_0, \end{aligned} \quad (4.160)$$

с правой частью, удовлетворяющей условиям, сформулированным в начале параграфа.

Составим уравнение интегралов:

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y} F(t, y) = 0, \quad (4.161)$$

и будем искать его решение в виде ряда по степеням ε :

$$U(t, y, \varepsilon) = U_0(t, y) + \varepsilon U_1(t, y) + \dots + \varepsilon^n U_n(t, y) + \dots \quad (4.162)$$

В соответствии с методом неопределенных коэффициентов, получим следующую серию задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial y} F(t, y) &= 0, \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} F(t, y) &= -\frac{\partial U_0}{\partial t}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial U_n}{\partial y} F(t, y) &= -\frac{\partial U_{n-1}}{\partial t}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.163)$$

В качестве U_0 возьмем голоморфную на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$ функцию $\varphi(t)$ такую, что $\varphi(t_0) = 0$. Для нахождения остальных коэффициентов

ряда (4.162) воспользуемся начальной гиперплоскостью $\Lambda : \langle e^*, y \rangle = \langle e^*, y_0 \rangle$ при условии, что $\forall t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ выполнено неравенство $\langle e^*, F(t, y) \rangle \neq 0$. В итоге, в соответствии с формулой (4.156), имеем:

$$U(t, y, \varepsilon) = \varphi(t) - \varepsilon \int_0^s ds_1 \cdot \varphi'(t) + \varepsilon^2 \int_0^s ds_1 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{s_1} ds_2 \cdot \varphi'(t) - \dots \quad (4.164)$$

— решение уравнения (4.161) и, одновременно, интеграл уравнения (4.160) такой, что

$$U(t, y(t, \varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad (4.165)$$

на решении задачи Коши (4.160).

Доказательство сходимости ряда (4.164) в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ полностью повторяет (с заменой модуля на норму) доказательство соответствующего утверждения для систем (см. § 4.2).

§ 4.7. Галёркинские приближения и псевдоголоморфность

Сначала вкратце напомним метод Галёркина решения уравнений в банаховых пространствах, рассмотрев задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = F(t, y), \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.166)$$

в вещественном банаховом пространстве E с базисом

$$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, \dots\}.$$

Будем предполагать глобальную разрешимость самой задачи Коши (4.166) и ее галёркинских приближений на отрезке $[0, T]$ (доказав, например, соответствующие априорные оценки [64]).

Далее, обозначим через P_n оператор проектирования на подпространство $E_n \subset E$, с базисом $\mathcal{B}_n = \{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда задаче (4.168) при каждом натуральном n можно поставить в соответствие задачу Коши для уравнения

$$\begin{cases} \frac{dy_n}{dt} = P_n F(t, y_n), \\ y_n(0) = P_n y_0 \end{cases} \quad (4.167)$$

n -го галёркинского приближения к решению $g(t)$. Здесь $y_n(t) = C_1(t)e_1 + \dots + C_n(t)e_n$ или же, если смотреть на (4.167) как на систему, $y_n(t) = \{C_1(t), \dots, C_n(t)\}$.

При сформулированных в параграфе § 4.6 условиях на оператор $F(t, y)$ имеем эквивалентные соответственно (4.166) и (4.167) интегральные уравнения:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t F(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (4.168)$$

и

$$y_n(t) = y_{0n} + \int_0^t P_n F(\tau, y_n(\tau)) d\tau, \quad (4.169)$$

где $y_{0n} = P_n y_0$.

Вычитая из уравнения (4.168) уравнение (4.169), получим:

$$\begin{aligned} y(t) - y_n(t) &= y_0 - y_{0n} + P_n \int_0^t [F(\tau, y(\tau)) - F(\tau, y_n(\tau))] d\tau + \\ &+ (J - P_n) \int_0^t F(\tau, y(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (4.170)$$

Применим к первой подынтегральной функции в правой части (4.170) формулу Лагранжа конечных приращений [86]:

$$\begin{aligned} y(t) - y_n(t) &= y_0 - y_{0n} + P_n \int_0^t \left[\int_0^1 F_y(y(\tau) + \Theta(y_n(\tau) - y(\tau))) d\Theta \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (y(\tau) - y_n(\tau)) \right] d\tau + (J - P_n) \int_0^t F(\tau, y(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (4.171)$$

Отсюда следует неравенство:

$$\begin{aligned} \|y(t) - y_n(t)\|_E &\leq \|y_0 - y_{0n}\|_E + \left\| (J - P_n) \int_0^t F(\tau, y(\tau)) d\tau \right\|_E + \\ &+ \|P_n\| \int_0^1 \left[\int_0^1 \|F_y(y(\tau) + \Theta(y_n(\tau) - y(\tau)))\| d\Theta \cdot \|y(\tau) - y_n(\tau)\|_E \right] d\tau, \end{aligned} \quad (4.172)$$

к которому можно применить неравенство Гронуолла: если

$$0 \leq z(t) \leq A(t) + \int_0^t B(\tau) z(\tau) d\tau,$$

где $A(t), B(t) \geq 0$, то

$$z(t) \leq A(t) e^{\int_0^t B(\tau) d\tau}.$$

В итоге, имеем

$$\begin{aligned} \|y(t) - y_n(t)\|_E &\leq \left(\|y_0 - y_{0n}\|_E + \left\| (J - P_n) \int_0^t F(\tau, y(\tau)) d\tau \right\|_E \right) \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ \|P_n\| \int_0^1 \left[\int_0^1 \|F_y(y(\tau) + \Theta(y_n(\tau) - y(\tau)))\| d\Theta \right] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (4.173)$$

Очевидно, что

$$\|y_0 - y_{0n}\|_E \rightarrow 0, \quad \left\| (J - P_n) \int_0^t F(\tau, y(\tau)) d\tau \right\|_E \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно на отрезке $[0, T]$. Если нормы $\|P_n\|$ ограничены в совокупности (как, например, в случае, когда E — гильбертово пространство и $\|P_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$), то из неравенства (4.173) следует, что

$$y_n(t) \rightarrow y(t), \quad n \rightarrow \infty \quad (4.174)$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

Далее, ясно, что если уравнение сингулярно возмущенное, то при фиксированном $\varepsilon > 0$ все предыдущие утверждения будут верны. А, именно, пусть имеется задача Коши

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dy}{dt} = F(t, y), \\ y(0, \varepsilon) = y_0, \end{cases} \quad (4.175)$$

глобально разрешимая на отрезке $[0, T]$ при любом $\varepsilon > 0$. Запишем системы, аналогичные системам (4.167):

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dy_n}{dt} = P_n F(t, y_n), \\ y_n(0, \varepsilon) = P_n y_0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.176)$$

Сформулируем теорему о глобальной псевдоголоморфности в точке $\varepsilon = 0$ решений $y_n(t, \varepsilon)$ этих систем.

Теорема 4.5. Пусть $F(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\langle e_1^*, F(t, y_0) \rangle \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$ и оператор $A(t) = F_y(t, \mathbf{0})$, называемый оператором первой вариации [11], является диагональным в базисе $\mathcal{B}$. Тогда, если все собственные значения $A(t)$ отрицательны при всех $t \in [0, T]$, то каждое галёркинское приближение $y_n(t, \varepsilon)$ является псевдоголоморфным в глобальном смысле.

Доказательство. Так как линейный оператор $A(t)$ является диагональным в базисе $\mathcal{B}$, то и его сужение $A_n(t)$ на подпространство E_n при любом натуральном n также является диагональным оператором с первыми n собственными значениями на главной диагонали его матрицы в базисе $\mathcal{B}_n$. Но тогда, в соответствии с теоремой об устойчивости по первому приближению, асимптотически устойчиво нулевое решение автономной системы:

$$\frac{d\hat{y}_n}{ds} = P_n F(t, \hat{y}_n), \quad \hat{y}_n = \{d_1(t, s), \dots, d_n(t, s)\}, \quad (4.177)$$

в которой $t \in [0, T]$ играет роль параметра, а $s \geq 0$ — независимой переменной. Как известно (см. замечание 4.5), в этом случае задача Коши (4.176) имеет псевдоголоморфное в глобальном смысле решение $y_n(t, \varepsilon)$ и теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим смешанную задачу:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(t) u^3, \\ u(0, x) &= g(x), \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0.\end{aligned}\tag{4.178}$$

Относительно функций $a(t)$ и $b(t)$ будем предполагать, что они целые, причем $a(t) > 0$, $b(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T]$. Что касается функции $g(x)$, то будем считать ее элементом пространства Соболева $\overset{\circ}{W}_2^1(0, \pi)$ с базисом $\mathcal{B} = \{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots\}$. Приближения (по Галёркину) решения поставленной задачи будем искать в виде

$$u_n(t, x) = \sum_{k=1}^n C_k(t) \sin kx, \tag{4.179}$$

причем функции $C_k(t)$, вообще говоря, зависят от номера приближения n . Галёркинские приближения должны удовлетворять n условиям ортогональности в $\mathcal{L}_2(0, \pi)$ (при каждом $t \in [0, T]$):

$$\left(\varepsilon \frac{\partial u_n}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + b(t) u_n^3, \sin kx \right) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \tag{4.180}$$

Здесь скобки $(\cdot, \cdot)$ обозначают скалярное произведение в $\mathcal{L}_2(0, \pi)$. Это система из n дифференциальных уравнений с n неизвестными $C_1(t), \dots, C_n(t)$. Начальные условия для них, очевидно, следующие:

$$C_k(0) = g_k, \quad k = \overline{1, n}, \tag{4.181}$$

где g_k — координаты $g(x)$ в ортогональном базисе $\mathcal{B}$:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sin kx. \tag{4.182}$$

Покажем, что существует по крайней мере одно решение задачи Коши (4.180), (4.181) на всем отрезке $[0, T]$. Для этого достаточно установить априорную оценку для всех ее возможных решений [64].

Умножим каждое из уравнений системы (4.180) на $C_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$) и сложим получившиеся n равенств:

$$\left(\varepsilon \frac{\partial u_n}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + b(t) u_n^3, u_n \right) = 0 \quad (4.183)$$

или

$$\varepsilon \int_0^\pi \frac{\partial u_n}{\partial t} u_n dx - a(t) \int_0^\pi \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} u_n dx + b(t) \int_0^\pi u_n^4 dx = 0. \quad (4.184)$$

Применив ко второму интегралу формулу интегрирования по частям с учетом краевых условий, получим равенство

$$- \int_0^\pi \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} u_n dx = \int_0^\pi \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 dx,$$

с учетом которого

$$\varepsilon \int_0^\pi \frac{\partial u_n}{\partial t} u_n dx + b(t) \int_0^\pi u_n^4 dx + a(t) \int_0^\pi \left[u_n^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx = a(t) \int_0^\pi u_n^2 dx. \quad (4.185)$$

Так как

$$b(t) \int_0^\pi u_n^4 dx \geq 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

то

$$\varepsilon \int_0^\pi \frac{\partial u_n}{\partial t} u_n dx + a(t) \|u_n\|_{W_2^1(0, \pi)}^2 \leq a(t) \int_0^\pi u_n^2 dx. \quad (4.186)$$

Далее, проинтегрируем полученное неравенство по отрезку $[0, t]$, где $t \in [0, T]$. Тогда, будем иметь

$$\varepsilon \int_0^t \left(\int_0^\pi \frac{\partial u_n}{\partial \tau} u_n dx \right) d\tau + \int_0^t a(\tau) \|u_n(\tau)\|_{W_2^1(0, \pi)}^2 d\tau \leq \int_0^t a(\tau) \left(\int_0^\pi u_n^2(\tau, x) dx \right) d\tau. \quad (4.187)$$

Рассмотрим первый интеграл в неравенстве (4.187):

$$\int_0^t \left(\int_0^\pi \frac{\partial u_n}{\partial \tau} u_n dx \right) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^\pi dx \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} (u_n^2) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^\pi u_n^2(t, x) dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi u_n^2(0, x) dx. \quad (4.188)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_n^2(t, x) dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_n^2(0, x) dx + \int_0^t a(\tau) \|u_n(\tau)\|_{W_2^1(0, \pi)}^2 d\tau \leq \\ \leq \int_0^t a(\tau) \left(\int_0^\pi u_n^2(\tau, x) dx \right) d\tau, \end{aligned} \quad (4.189)$$

откуда, ввиду положительности

$$\int_0^t a(\tau) \|u_n(\tau)\|_{W_2^1(0, \pi)}^2 d\tau,$$

получим:

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_n^2(t, x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_n^2(0, x) dx + \int_0^t a(\tau) \left(\int_0^\pi u_n^2(\tau, x) dx \right) d\tau. \quad (4.190)$$

Пользуясь определением нормы в $\mathcal{L}_2(0, \pi)$, а также тем, что

$$\int_0^\pi u_n^2(0, x) dx \leq \int_0^\pi g^2(x) dx = \|g\|_{\mathcal{L}_2(0, \pi)}^2,$$

представим неравенство (4.190) в следующем виде:

$$\frac{\varepsilon}{2} \|u_n(t)\|_{\mathcal{L}_2(0, \pi)}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|g\|_{\mathcal{L}_2(0, \pi)}^2 + \int_0^t a(\tau) \|u_n(\tau)\|_{\mathcal{L}_2(0, \pi)}^2 d\tau \quad (4.191)$$

и применим неравенство Гронуолла. В итоге, имеем неравенство

$$\|u_n(t)\|_{\mathcal{L}_2(0, \pi)}^2 \leq \|g\|_{\mathcal{L}_2(0, \pi)}^2 e^{\frac{2}{\varepsilon} \int_0^t a(\tau) d\tau}, \quad (4.192)$$

которое, с учетом ортогональности системы $\mathcal{B}$, означает существование при фиксированном ε константы $M > 0$, независимой от n , такой, что при всех $t \in [0, T]$

$$\sum_{k=1}^n C_k^2(t) \leq M, \quad (4.193)$$

и априорная оценка получена. Напомним [64], что она означает глобальную разрешимость задачи Коши (4.180), (4.181) на отрезке $[0, T]$ при любом n . Укажем конкретный вид систем (4.180) при $n = 2, 3$:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{C}_1 = -a(t)C_1 - \frac{3}{4}b(t)C_1^3 - \frac{3}{2}b(t)C_1C_2^2, \\ \varepsilon \dot{C}_2 = -4a(t)C_2 - \frac{3}{2}b(t)C_1^2C_2 - \frac{3}{4}b(t)C_2^3; \end{cases} \quad (4.194)$$

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{C}_1 = -a(t)C_1 - \frac{3}{4}b(t)C_1^3 - \frac{3}{2}b(t)C_1C_2^2 + \frac{3}{4}b(t)C_1^2C_2 - \\ \quad - \frac{3}{2}b(t)C_1C_3^2 - \frac{3}{4}b(t)C_2^2C_3, \\ \varepsilon \dot{C}_2 = -4a(t)C_2 - \frac{3}{4}b(t)C_2^3 - \frac{3}{2}b(t)C_1^2C_2 - \frac{3}{2}b(t)C_2C_3^2 - \\ \quad - \frac{3}{2}b(t)C_1C_2C_3, \\ \varepsilon \dot{C}_3 = -9a(t)C_3 + \frac{1}{4}b(t)C_1^3 - \frac{3}{4}b(t)C_1C_2^2 - \frac{3}{4}b(t)C_2^3 - \\ \quad - \frac{3}{2}b(t)C_1^2C_3 - \frac{3}{2}b(t)C_2^2C_3. \end{cases} \quad (4.195)$$

Асимптотическая устойчивость точек покоя систем вида (4.177) здесь видна непосредственно.

В конечном итоге условия теоремы 4.5 выполнены и, следовательно, любое галёркинское приближение $u_n(t, x, \varepsilon) = C_1(t, \varepsilon) \sin x + \dots + C_n(t, \varepsilon) \sin nx$ является псевдоголоморфным в глобальном смысле.

Замечание 4.10. Если $a(t) = b(t) = 1$ и $g(x) = \sin x$, то удастся найти в явном виде $u_2(t, x, \varepsilon) = C_1(t, \varepsilon) \sin x + C_2(t, \varepsilon) \sin 2x$. При этом $C_2(t, \varepsilon) \equiv 0$ на полуоси $[0, +\infty)$, а

$$C_1(t, \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{7e^{\frac{2t}{\varepsilon}} - 3}}.$$

Таким образом,

$$u_2(t, x, \varepsilon) = \frac{2 \sin x}{\sqrt{7e^{\frac{2t}{\varepsilon}} - 3}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бибииков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л., изд-во Ленинград. ун-та, 1981, 232 с.
2. Бобочко В.Н. Задача Валле—Пуссена для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с нестабильным спектром предельного оператора. // Укр. мат. журнал, 1984, т. XVII, № 2, с. 34—45.
3. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Сингулярно возмущенные интегродифференциальные системы с контрастными структурами // Матем. сборник, 2005, т. 196, № 2, с. 29—56.
4. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М., Наука, 1987, 256 с.
5. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефёдов Н.Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикладная математика, 1998, т. 4, № 3, с. 799—851.
6. Бутузов В.Ф., Неделько И.В. О глобальной области влияния устойчивых решений с внутренними слоями в двумерном случае // Изв. РАН, серия «Математика», 2002, т. 66, № 1, с. 3—42.
7. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., Высшая школа, 1990, 207 с.
8. Васильева А.Б., Плотников А.А. Асимптотическая теория сингулярно возмущенных задач. М., Физический фак-т МГУ, 2008, 140 с.
9. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук, 1957, т. 12, № 5, с. 3—122.
10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., Физматлит, 2008, 398 с.
11. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., Наука, 1970, 534 с.
12. Дубинский Ю.А. Алгебра псевдодифференциальных операторов с комплексными аргументами и ее приложения // Итоги науки и техники. Сер. «Совр. проблемы математики. Новейшие достижения». Т. 29. М., ВИНТИ, 1986, с. 109—150.

13. Егоров Ю.В. Лекции по уравнениям с частными производными. М., МГУ, 1985, 164 с.
14. Елисеев А.Г., Ломов С.А. Теория возмущений в банаховом пространстве // ДАН СССР, 1982, т. 264, № 1, с. 34—38.
15. Задорожний В.Г., Курина Г.А. Обратная задача вариационного исчисления для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом Матем. заметки, 90:2 (2011), 231-241
16. Задорожний В.Г., Хребтова С.С. Первые моментные функции решения уравнения теплопроводности со случайными коэффициентами Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 49:11 (2009), 1937-1952
17. Задорожний В.Г. О нахождении моментных функций решения задачи Коши уравнения диффузии со случайными коэффициентами Изв. РАН. Сер. матем., 66:4 (2002), 119-136
18. Зубова С.П., Трофимов В.П. О частных решениях дифференциального уравнения в банаховом пространстве с малым параметром при производной. // Докл. РАН, 1992, т. 325, № 6, с. 1104—1106.
19. Ильин А.М., Меленцов М.А. Асимптотика решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при больших значениях времени. // Труды ИММ, 2005, т. 11, № 1, с. 97—110.
20. Ильин А.М., Леоничев Ю.А., Хачай О.Ю. Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой. // Матем. сборник, 2010, т. 201, № 1, с. 81—102.
21. Иманалиев М. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе, Илим, 1972.
22. Иосида К. Функциональный анализ. М., Мир, 1967, 616 с.; М., ЛКИ, 2007, 624 с.
23. Касымов К.А. Асимптотические разложения решений задач с начальными скачками для обыкновенных, интегро-дифференциальных и гиперболических уравнений с малым параметром при старшей производной. // Докт. дисс., Алма-Ата, 1971.
24. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972,

25. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1988, 400 с.
26. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. М., Наука, 1989, 416 с.
27. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., Наука, 1967, 464 с.
28. Крейн С.Г., Товбис А.И. Линейные дифференциальные уравнения в конечномерных и банаховых пространствах // Алгебра и анализ, 1990, т. 2, вып. 5, с. 1—62.
29. Крейн С.Г., Фомин В.И. Малые возмущения сингулярно возмущенных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. // ДАН СССР, 1990, т. 334, № 1, с. 77—79.
30. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Наука, 1970, 288 с.
31. Ломов С.А. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих малый параметр // Труды МЭИ, 1962, вып. 42, с. 99—144.
32. Ломов С.А. Степенной пограничный слой в задачах с малым параметром // ДАН СССР, 1963, т. 143, № 3, с. 516—519.
33. Ломов С.А. Обобщение теоремы Фукса на неаналитический случай. // Матем. сборник, 1964, т. 65, № 4, с. 498—511.
34. Ломов С.А. О модельном уравнении Лайтхилла // Сб. науч. трудов МО СССР, 1994, № 54, с. 74—83.
35. Ломов С.А. Степенной пограничный слой в задачах с сингулярным возмущением // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1966, т. 30, вып. 3, с. 525—572.
36. Ломов С.А. Асимптотическое поведение решений уравнений, предельные решения которых разрывны // Докл. научно-техн. конф. по итогам науч.-исслед. работ за 1966-1967 гг. Сек. матем. М., МЭИ, 1967, с. 133—145.
37. Ломов С.А. О сходимости асимптотических рядов // Труды МЭИ,

1975, вып. 240, с. 91—96

38. Ломов С.А., Сафонов В.Ф. Метод регуляризации для систем со слабой нелинейностью в резонансном случае // Матем. заметки, 1979, т. 25, № 6, с. 871—889.
39. Ломов С.А. Приближенные решения дифференциальных уравнений при наличии существенно особых точек времени. // Всесоюзный симпозиум по теории аппроксимации функций в комплексной области. Уфа, 1980, с. 84—85.
40. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., Наука, 1981, 398 с.
41. Ломов С.А. Аналитические решения сингулярно возмущенных задач // ДАН СССР, 1982, т. 265, № 3, с. 529—533.
42. Ломов С.А., Стрижков В.А. Обобщение теоремы Тихонова на случай чисто мнимого спектра // ДАН СССР, 1983, т. 271, № 6, с. 1317—1320.
43. Ломов С.А., Сафонов В.Ф. Алгоритм нормальных форм в нелинейных сингулярно возмущенных системах с нестабильным спектром // Укр. матем. журнал, 1986, т. 38, № 4, с. 453—464.
44. Ломов С.А., Елисеев А.Г. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач // Успехи матем. наук, 1988, т. 43, вып. 3(261), с. 3—53.
45. Ломов С.А. Псевдоаналитичность и проблема математического описания пограничного слоя. // ДАН СССР, 1992, т. 325, № 2, с. 231—236.
46. Ломов С.А. Специфическая гладкость решений сингулярно возмущенных задач // Дифференц. уравнения, 1993, т. 29, № 5, с. 786—794.
47. Ломов С.А. Точнорешаемые сингулярно возмущенные задачи // Доклады РАН, 1994, т. 338, № 5, с. 595—597.

48. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М., Изд-во Моск. ун-та, 2011, 456 с.
49. Ломов И.С. Необходимые и достаточные условия существования целых аналитических решений сингулярно возмущенных уравнений // ДАН СССР, 1988, т. 299, № 4, с. 811—815.
50. Ломов И.С. Построение точных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений // Дифференц. уравнения, 1988, т. 24, № 6, с. 1073—1075.
51. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. Киев, Наукова думка, 1983, 212 с.
52. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Изв. АН СССР, Сер. матем., 1972, т. 36, № 5, с. 1080—1133.
53. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Наука, 1983, 391 с.
54. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. М., Наука, 1988.
55. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М., Наука, 1964.
56. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, Наукова думка, 1971.
57. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., Наука, 1983.
58. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения, 1995, т. 31, № 7, с. 1132—1139.
59. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Метод дифференциальных неравенств для контрастных структур типа ступеньки в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях в пространственно-двумерно случае // Дифференц. уравнения, 2006, т. 42, № 5, с. 690—700.
60. Нестеров А.В., Шулико О.В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в критическом

- случае. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 50:2 (2010), 268-275.
61. Овсянников Л.В. Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств // ДАН СССР, 1965, т. 163, № 4, с. 819—822.
62. Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М., Физматлит, 1997, 512 с.
63. Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенных параболических задач. Автореф. дисс. докт. физ.-мат. наук. Бишкек, 2008
64. Похожаев С.И., Жаринов В.В., Илларионов М.А., Пикулин В.П. Нелинейный прикладной функциональный анализ. М., МЭИ, 1989.
65. Прохоренко В.И. Теоремы о гладкости периодических решений дифференциальных уравнений с особыми точками // ДАН СССР, 1991, т. 320, № 2, с. 280—283.
66. Радыно Я.В. Векторы экспоненциального типа и функциональное исчисление // ДАН БССР, 1983, т. 27, № 10, с. 875—878.
67. Радыно Я.В. Экспоненциальные векторы и дифференциальные уравнения. Автореф. дисс. докт. физ.-мат. наук. Минск, 1986.
68. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. М., Мир, 1982, 430 с.
69. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., Мир, 1982, 430 с.
70. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т. 1. М., Мир, 1982, 486 с.; Т. 2. М., Мир, 1984, 381 с.
71. Романов В.Н., Самохин В.Н. О скорости сходимости решений уравнений Прандтля в быстро осциллирующем магнитном поле. // Докл. РАН, 2009, т. 426, № 4, с. 450—456.
72. Самохин В.Н. Образование пограничного слоя в окрестности кормовой точки // Труды семин. им. И.Г. Петровского, 2003, вып. 23, с. 358—385.
73. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. М., Высшая школа, 1989.

74. Сафонов В.Ф. Нелинейная регуляризация сингулярно возмущенных резонансных задач и аналитичность их решений по параметру // Сиб. матем. журнал, 1992, т. 33, № 6, с. 178—187.
75. Сафонов В.Ф. Регуляризованные асимптотические решения сингулярно возмущенных задач в критическом случае // Изв. вузов. Математика. 1994, № 5, с. 41—48.
76. Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации. М., Изд-во МЭИ, 2010, 316 с.
77. Сушко В.Г., Розов Н.Х. Бисингулярные краевые задачи: Когда существует внутренний слой? // Матем. модели и методы. Труды II матем. чтений МГСУ. М., Союз, 1994, с. 4—6.
78. Территин Х.Л. Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр // Математика, 1957, т. 1, № 2, с. 29—59.
79. Тихонов А.Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // ДАН СССР, 1935, т. 1, № 2, с. 294—300.
80. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб., 1948, 22(64), с. 193—204.
81. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Матем. сб., 1952, 31(73), с. 575—586.
82. Титчмарш Н. Теория функций. М., Наука, 1980, 507 с.
83. Толминн В. 50 лет исследований пограничного слоя, их развитие и проблематика // Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи. М.; Л., Госэнергоиздат, 1960, 394 с.
84. Треногин В.А. Асимптотика и существование решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве // ДАН СССР, 1963, т. 152, № 1, с. 63—66.
85. Треногин В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника—Вишика. // Успехи матем. наук, 1970, т. 25, № 4, с. 123—156.
86. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Наука, 1980, 495 с.

87. Фаге М.К., Нагнибида Н.И. Проблема эквивалентных обыкновенных дифференциальных операторов. Новосибирск, Наука, 1987, 280 с.
88. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1982.
89. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, киев, Наукова думка, 1966, 251 с.
90. Филатов А.Н., Шершков В.В. Асимптотический анализ адиабатической атмосферной модели, учитывающей рельеф Земли // ДАН СССР, 1985, т. 282, № 6, с. 1338—1341.
91. Филатов А.Н. О некоторых задачах теории сингулярно возмущенных уравнений // Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 10, с. 1726—1730.
92. Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М., Мир, 1969.
93. Хапаев М.М. К вопросу построения решений в некорректной нелинейной сингулярно возмущенной задаче для уравнения эллиптического типа. // Матем. заметки, 2003, т. 73, вып. 2, с. 318—320.
94. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., Мир, 1968.
95. Чанг К., Хауэс Ф. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. Теория и приложения. М., Мир, 1988, 247 с.
96. Hadamard J. Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d'une fonctions considered par Riemann. // Journal de Math. Ser 4, 1893, № 4, p. 171—175.
97. Birkhoff G.D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. // Trans. Amer. Math. Soc., 1908, v. 9, p. 219—231.
98. Boas R.P. Functions of exponential type. III. // Duke Math. J., 1944, v. 11, p. 507—511.
99. Mascartes H. Sur quelques operateurs lineares differentielles // Ann. Sei. Univ. de Toulouse. J. Sei. Math. Phys., 1960, v. 24, p. 5—75.

100. Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr Kleiner Reibung // Verhandl. des III. Intern. mathem. Kongress. Heidelberg, 1904; Leipzig, 1905, p. 484—491.
101. Poincare A. Sur les integrales irregulieres des equations linieries // Acta Meth., 1886, v. 8.
102. Schlesinger L. Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters // Math. Ann., 1907, bd. 63, p. 207—300.
103. Wasow W.A. On the convergence of an approximation method of M.J. Lighthill // J. Rational Mech. and Analysis, 1955, v. 4, p. 751—763.
104. Качалов В.И., Ломов С.А. Гладкость решений дифференциальных уравнений по сингулярно входящему параметру. // ДАН СССР, 1988, т. 299, № 4, с. 805—808.
105. Качалов В.И., Ломов С.А. Об аналитических свойствах решений дифференциальных уравнений с особыми точками // ДАН СССР, 1989, т. 304, № 1, с. 22—24.
106. Качалов В.И. О существовании гладких по параметру решений для сингулярно возмущенных уравнений // Дифференц. уравнения, 1990, т. 26, № 9, с. 1641—1643.
107. Качалов В.И. О гладкости решений дифференциальных уравнений, содержащих параметр. // Дифференц. уравнения, 1990, т. 26, № 10, с. 1711—1716.
108. Качалов В.И. Развитие аналитической теории сингулярных возмущений с использованием пространств векторов экспоненциального типа. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М., МЭИ, 1990.
109. Качалов В.И. Гладкость решений дифференциальных уравнений по сингулярно входящему параметру // Асимптотические методы теории сингулярно возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач. Тез. докл. Всесоюз. конф. г. Бишкек, 1991, с. 126.
110. Качалов В.И. Эволюция прямого разложения банахова пространства и псевдоаналитичность // Алгебраические структуры и теория сингулярных возмущений. Тр. I матем. чтений МГСУ, 1993, с. 73—74.

111. Качалов В.И., Ломов С.А. Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач. // Доклады РАН, 1994, т. 334, № 6, с. 694—695.
112. Качалов В.И., Прохоренко В.И. Псевдоаналитичность решений сингулярно возмущенных задач. // Матем. методы и приложения. Труды 7-х матем. чтений РГСУ, 2000.с.77-78.
113. Качалов В.И., Кудин С.Ф. Аналитические свойства первых интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. методы и приложения. Труды 8-х матем. чтений РГСУ, 2001.с.59-60.
114. Качалов В.И. Коммутационные соотношения и дифференциальные уравнения// Труды XII международной конференции МКЭЭЭ, Крым, Алушта, 2008г. с.341.
115. Качалов В.И. Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач // XXII межд. науч. конф. «Матем. методы в технике и технологиях ММТТ-22». Сборник трудов, т. 1. Псков, 2009.с.157.
116. Качалов В.И. Гомоморфизмы алгебр аналитических функций. // XXIII межд. науч. конф. «Матем. методы в технике и технологиях ММТТ-23». Сборник трудов, т. 1. Саратов, 2010.с.81.
117. Качалов В.И. Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач // Вестник МЭИ, 2010, № 6, с. 54—62.
118. Качалов В.И. Алгебраические аспекты теории сингулярных возмущений // Матем. методы и приложения. Труды 20-х матем. чтений РГСУ, 2011, с. 53—57.
119. Качалов В.И. Гомоморфизмы в теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 2011, т. 47, № 11, с. 1660—1661.
120. Качалов В.И. Алгебраические основы теории сингулярных возмущений и теорема Пуанкаре о разложении. // Материалы за VII межд. практ. конф. «Новини на научния прогресс—2011», София, «БялГРАД-БГ» ООД, т. 9, 2011, с. 64—70.
121. Качалов В.И. Голоморфные по параметру интегралы сингулярно возмущенных систем. // Вестник МЭИ, 2011, № 6, с. 57—68.
122. Качалов В.И. Алгебраические основы теории сингулярно возмущенных уравнений // Доклады РАН, 2012, т. 443, № 1, с. 7—8.

123. Качалов В.И., Фёдоров Ю.С. О голоморфных по малому параметру интегралах сингулярно возмущенных систем. // Матем. методы и приложения. Труды 21-х матем. чтений РГСУ, 2012, с. 42—48.
124. Качалов В.И. Псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Вестник МЭИ, 2012, № 6, с. 13—21.
125. Качалов В.И. Об алгебраических основах теории сингулярных возмущений // Дифференц. уравнения, 2013, т. 49, № 3, с. 397—401.
126. Качалов В.И. Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенного уравнения второго порядка // Вестник МЭИ, 2013, № 6, с. 95—103.
127. Качалов В.И. Коммутационные соотношения, гомоморфизмы и дифференциальные уравнения. // Дифференц. уравнения, 2014, т. 50, № 1, с. 10—16.
128. Качалов В.И. Голоморфные по параметру интегралы сингулярно возмущенных уравнений второго порядка и предельные теоремы // Научно—технический вестник СПбГПУ. Физико—математические науки, раздел "Математика", 2014, № 2(194), с. 103—109.
129. Качалов В.И. Теорема Тихонова о предельном переходе и псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных задач // Доклады РАН, 2014, т. 458, № 6, с. 630—632.