

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ИВАН ДМИТРИЕВИЧ РЕМИЗОВ

**ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ И ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЧЕРНОВА**

Специальность 01.01.01
(вещественный, комплексный и функциональный анализ)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических
наук, профессор
Олег Георгиевич Смолянов

Москва
2017

Оглавление

Введение	3
1 Черновские аппроксимации полугрупп операторов и их приложения к эволюционным уравнениям	12
1.1 Полугруппы и их генераторы	12
1.2 Полугруппы и эволюционные уравнения	18
1.3 Аппроксимации полугрупп полугруппами	20
1.4 Черновские аппроксимации полугрупп	22
1.5 Формальные решения в смысле Чернова	25
1.6 Исчисление функций Чернова	28
2 Построение решения одномерного параболического уравнения при помощи оператора сдвига	32
2.1 Постановка задачи и предлагаемый подход	32
2.2 Используемая техника	33
2.3 Основной результат	34
2.4 Формулы Фейнмана с обобщенными функциями	36
3 Формулы для решения бесконечномерного параболического уравнения, построенные с помощью интегрального оператора	38
3.1 Предварительные замечания	38
3.2 Обозначения и определения	39
3.3 Вспомогательные конструкции	42
3.3.1 Мера и интеграл в гильбертовом пространстве	42
3.3.2 Дифференцирование в гильбертовом пространстве	44
3.3.3 Дифференциальный оператор в конечномерном пространстве	45
3.3.4 Свойства пространств D, F, D_1	46
3.4 Основные результаты	49
3.4.1 Семейство S_t является функцией Чернова для полугруппы с генератором $\bar{L}$	49
3.4.2 Решение задачи Коши для параболического уравнения представляется в виде формулы Фейнмана	68
Заключение	73
Литература	75

Введение

Актуальность темы. Диссертация посвящена развитию техники, связанной с исследованием одного из центральных объектов бесконечномерного анализа, находящего важные приложения в математической физике — функционального интеграла (интеграла Фейнмана по траекториям). Опубликовано много работ, посвящённых изучению и приложениям этого объекта, но большинство из них написаны на физическом уровне строгости, так как математическое описание возникающих конструкций связано с преодолением серьёзных технических и идейных трудностей. Число чисто математических работ этого направления сравнительно невелико, но в последнее десятилетие оно быстро возрастает. Этот рост связан не только с важностью обсуждаемых объектов для приложений, но и с внутренней логикой развития анализа. Сказанное и определяет актуальность темы диссертации. Обоснуем теперь, почему и в рамках этой достаточной широкой тематики поставленные и решённые в диссертации задачи занимают важное место.

Формулой Фейнмана (в смысле О.Г. Смолянова) называется представление решения эволюционного уравнения в виде предела кратного интеграла при кратности, стремящейся к бесконечности. При этом описана [28] связь интеграла Фейнмана и формул Фейнмана: кратные интегралы конечной (но неограниченно возрастающей) кратности в формулах Фейнмана являются аппроксимациями для интеграла «бесконечной кратности», т.е. интеграла Фейнмана по траекториям. Поэтому во многих случаях можно использовать формулы Фейнмана как для математически корректного определения интеграла Фейнмана, так и для его вычисления.

Впервые так называемые лагранжевы формулы Фейнмана появились в работе Р. Фейнмана 1948 года [57], где он постулировал их «на физическом уровне строгости», т.е. без математического доказательства. Построенные Фейнманом формулы доказал в 1964 году Э. Нельсон [51], его доказательство опиралось

на открытую в 1959 году теорему Троттера [66], называемую также иногда теоремой Троттера-Далецкого-Ли. Гамильтоновы формулы Фейнмана в 1951 году были также без доказательства предложены Р. Фейнманом [56], а доказаны в 2002 году работе О.Г. Смолянова, А.Г. Токарева и А. Трумана [61] при помощи появившейся в 1968 году теоремы Чернова [43].

Первые упоминания теоремы Чернова в работах О.Г.Смолянова с соавторами относятся к 2000 году [62, 64, 24]. О состоянии исследований с применением теоремы Чернова в рамках парадигмы О.Г.Смолянова можно судить по обзорам [58, 59, 10] и вновь выходящим статьям М.С.Бузинова, Я.А.Бутко, Б.О.Волкова, А.А.Калиниченко, А.А.Кравцевой, Ю.Н.Орлова, В.Ж.Сакбаева, О.Г.Смолянова, Е.Т.Шавгулидзе, Н.Н.Шамарова, автора диссертации и ссылкам в этих статьях. Достаточно обширная (но всё равно не полная) библиография имеется в датированном августом 2017 года препринте Я.А.Бутко [41]. Приведём наиболее часто используемую формулировку этой теоремы.

Теорема Чернова (Теорема 10.7.21 в книге [5]). Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство и $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть дана функция $G: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$, непрерывная на каждом векторе, причём $G(0) = I$ и $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ с некоторой постоянной $\omega \in \mathbb{R}$. Пусть есть такое плотное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ существует предел $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(G(t)f - f)$, значение которого будем обозначать символом $G'(0)f$. Предположим, что $G'(0)$ на $\mathcal{D}$ обладает замыканием C , и что C является генератором сильно непрерывной полугруппы $(e^{tC})_{t \geq 0}$. Тогда для каждого $f \in \mathcal{F}$ и каждого $t_0 > 0$ имеет место равномерная по $t \in [0, t_0]$ сходимость $e^{tC}f = \lim_{n \rightarrow \infty} G(t/n)^n f$.

Пусть $\mathcal{F}$ — пространство числовых функций на некотором бесконечном множестве Q . Если C — неограниченный оператор, то вычислять e^{tC} обычно трудно, поскольку задача вычисления e^{tC} равносильна решению задачи Коши

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = Cu(t, x) & \text{для } t > 0, x \in Q \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{для } x \in Q \end{cases}$$

для линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (в оператор C входят функции, зависящие от x), при этом $u(t, x) = (e^{tC}u_0)(x)$. Однако, если мы располагаем подходящим семейством $(G(t))_{t \geq 0}$, то можно вычислять e^{tC} приближённо с помощью теоремы Чернова. Такой подход далее

называется *аппроксимацией по Чернову*, сами выражения $G(t/n)^n$ — *черновскими аппроксимациями*, а функция G — *функцией Чернова оператора C* .

Если оператор $G(t)$ — интегральный, то $G(t/2)^2 f$ — это результат применения к функции f интегрального оператора два раза подряд, т.е. это двухкратный повторный интеграл, который можно трактовать как двойной. Аналогично, $G(t/3)^3 f$ представляет собой тройной интеграл, а $G(t/n)^n f$ — n -кратный интеграл. Таким образом, при каждом $t > 0$ оказывается, что $e^{tC} f$ равно пределу кратных интегралов при кратности, стремящейся к бесконечности. Именно так при применении теоремы Чернова в рамках парадигмы О.Г.Смолянова возникают формулы Фейнмана.

В связи с обоснованной выше важностью теоремы Чернова для приложений в математической теории интеграла Фейнмана и в теории уравнений с частными производными эта теорема сама являлась и является объектом пристального внимания. Так, А.Ю.Неклюдов получил [18] обобщение теоремы на случай, когда пространство $\mathcal{F}$ не нормированное, а лишь локально выпуклое. А.С.Пляшечник сформулировал, доказал и применил [54, 55] вариант теоремы Чернова, пригодный для решения неавтономных эволюционных уравнений, т.е. уравнений $u'(t) = C(t)u(t)$ с явно зависящим от времени оператором C . Были получены [17, 19] результаты об обращении теоремы Чернова. Существует (следствие 5.3 из теоремы 5.2 в книге [47]) вариант теоремы Чернова, в предполагающую часть которой внесено условие плотности образа оператора $C - \lambda I$ в $\mathcal{F}$ при некотором $\lambda > 0$; в этом случае существование полугруппы с генератором C утверждается теоремой, а не предполагается, как в классической теореме Чернова. Предпринимались попытки структурировать теорему Чернова, т.е. предлагались способы разбиения её условий на части, см., например, работы В.А.Дубравиной [45] и Я.А.Бутко [41]; несколько вариантов были предложены О.Г.Смоляновым и его соавторами. В большинстве случаев эти структурирования были призваны облегчить автору структурирования доказательство тех утверждений, под которые было подобрано это структурирование. При этом ни один из исследователей до автора диссертации не ставил задачу предложить такое структурирование, которое могло бы само по себе быть источником универсальных методов получения функций Чернова.

Таким образом, на момент начала диссертационного исследования имела место следующая ситуация:

- Теорема Чернова около 10 лет активно используется группой О.Г.Смолянова для выражения решения задачи Коши для эволюционных уравнений через коэффициенты уравнения и начальное условие.
- Решение задачи Коши $u'_t(t, x) = Cu(t, x)$, $u(0, x) = u_0(x)$ имеет вид $u(t, x) = (e^{tC}u_0)(x)$, где экспонента e^{tC} может быть вычислена путём построения функции Чернова G для оператора C и применения (верной в силу теоремы Чернова) формулы $e^{tC} = \lim_{n \rightarrow \infty} G(t/n)^n$.
- Во всех известных примерах оператор $G(t)$ был интегральным, поэтому решение представлялось в виде предела кратных интегралов при растущей к бесконечности кратности (т.е. в виде формулы Фейнмана), что позволяет применять такие представления в математической теории континуального интеграла (интеграла Фейнмана по траекториям).
- Функции Чернова многих дифференциальных операторов известны, но регулярных методов построения функций Чернова не существует: для каждого оператора C приходится подбирать функцию Чернова индивидуально, хотя накопленный опыт уже начинает обобщаться в виде первых теорем общего характера [40].

В связи с этим, направление дальнейшего развития в области применения теоремы Чернова определяется ответами на следующие вопросы:

- Можно ли построить исчисление функций Чернова, т.е. предложить какие-либо регулярные методы построения функций Чернова для достаточно широкого класса операторов? Это позволило бы уйти от постоянного разбора частных случаев и начать строить общую теорию.
- Кроме интегральных, какие операторы могут выступать в роли функций Чернова? Как трактовать черновские аппроксимации, полученные на основе этих других операторов?

В первых двух главах диссертации эти вопросы получают свои ответы, что доказывает актуальность содержания этих глав.

Первая глава начинается с обзора литературы и определения используемых в диссертации терминов, там же даются необходимые пояснения и примеры. После этого обсуждается принадлежащая автору диссертации конструкция касания по Чернову и предлагается схема построения исчисления функций Чернова. А именно, доказывается, что если даны функции, касательные по Чернову к операторам A и B , то явно указанными в первой главе формулами можно задать функции, касательные по Чернову к операторам $A+B$ и AB . Далее, во второй и третьей главах диссертации рассуждения посвящены решению задач Коши для уравнения $u'_t(t, x) = Lu(t, x)$ в двух конкретных случаях. Обе задачи полностью решены автором. Возникшие при этом теоремы снабжены подробными доказательствами и ссылками на теорию из первой главы.

Во второй главе диссертации предполагается, что x принадлежит $\mathbb{R}^1$, а уравнение $u'_t(t, x) = Lu(t, x)$ — это параболическое уравнение второго порядка с переменными (вещественными) коэффициентами, которые зависят от x , но не от t . Уравнение решается путём применения черновской аппроксимационной процедуры со специально построенным семейством операторов сдвига. Доказана равномерная сходимость аппроксимаций к точному решению. Решение при этом представляется в виде выражения нового типа, поскольку в здесь используются не степени интегрального оператора (приводящие к обычным формулам Фейнмана), а степени оператора сдвига. Доказано, что решение может быть записано также как формула Фейнмана с интегральным ядром, содержащим обобщённые функции. Ранее это уравнение было решено многими способами, однако здесь впервые теорема Чернова применяется к семейству операторов сдвига, а не к семейству интегральных операторов.

В третьей главе диссертации предполагается, что аргумент x принадлежит бесконечномерному сепарабельному гильбертову пространству H , а в роли L выступает дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий производные второго, первого и нулевого порядков. Вторая производная входит в L в виде лапласиана Вольтерры-Гросса [3], который строится по линейному оператору $A: H \rightarrow H$ с конечным следом так: если f — числовая функция на H , то по определению $(\Delta_A f)(x) = \text{trace}(Af'')(x)$. Решение с помощью теоремы Чернова пишется в виде предела кратных интегралов неограниченно растущей кратности, при этом интегрирование в гильбертовом пространстве ведётся по гауссовской мере с корреляционным оператором, рав-

ным произведению оператора A на зависящую от коэффициентов уравнения функцию.

Обоснуем актуальность задачи, решённой в третьей главе. Эволюционные уравнения (типа теплопроводности и типа Шрёдингера) в бесконечномерных пространствах [1, 2] привлекают внимание исследователей примерно с 60-х годов XX века (в частности, см. работы О.Г. Смолянова, Е.Т. Шавгулидзе, А.Ю. Хренникова, С. Альбеверио). Существует множество статей, посвящённых этой тематике. Причина этого в том, что дифференциальные уравнения относительно функций бесконечномерного аргумента связаны с теорией поля и теорией струн, теорией случайных процессов, а также некоторыми задачами финансовой математики [16]. Приведём лишь несколько ссылок, важных для обоснования актуальности исследования, проведённого в третьей главе диссертации. Так, в частности, изучалось [9] уравнение Шрёдингера в гильбертовом пространстве. Уравнение содержит члены второго, первого и нулевого порядков, коэффициент при члене второго порядка постоянный. Решение задачи Коши даётся в виде формулы Фейнмана-Каца-Ито. Похожее уравнение Шрёдингера в гильбертовом пространстве удалось решить [22] с помощью интеграла по конечно-аддитивной мере и техники, выросшей из понятия черновского касания, см. работу [70] автора диссертации. В учебной литературе [44] разбирается решение уравнения теплопроводности в гильбертовом пространстве, без членов первого и нулевого порядка, коэффициент перед старшей производной постоянный. Решение даётся в виде свёртки с гауссовой мерой (полностью аналогично конечномерному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами), доказано существование разрешающей полугруппы операторов. В другом источнике [37] решение этого же уравнения даётся в виде формулы Фейнмана-Каца. Также было [39] рассмотрено параболическое уравнение с переменными коэффициентами (уравнение диффузии — его частный случай) в конечномерном пространстве. В предположении, что для задачи Коши существует сильно непрерывная разрешающая полугруппа, авторы доказывают формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца, дающие это решение. Рассматривались [30, 26, 25] формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца для решений задачи Коши для эволюционных уравнений в пространствах над полем p -адических чисел. Решение более простых, чем рассмотренное в третьей главе, уравнений типа теплопроводности было найдено с помощью интегрирования по специально построенной для это-

го конечно-аддитивной мере [22, 21].

Таким образом, остаётся нерассмотренным следующий важный случай: пространство координат вещественное и бесконечномерное, правая часть содержит производные порядка два, один и ноль, коэффициенты перед всеми производными переменные. Работы [68, 69] автора диссертации посвящены именно этому случаю, причём существование разрешающей полугруппы не предполагается, а доказывается, и также доказана непрерывная зависимость решения не только от начального условия, но и от коэффициентов уравнения.

Тем самым обоснована актуальность темы диссертации в целом, а также актуальность всех поставленных и решённых задач поглавно.

Цель работы — в рамках парадигмы школы О.Г. Смолянова продолжить исследование математических структур, связанных с теоремой Чернова, и применить их для получения представлений решений эволюционных уравнений с помощью формул Фейнмана и их аналогов. Ввести понятие функции, касательной по Чернову к оператору, и найти методы построения таких функций. Для параболического уравнения на вещественной прямой с переменными коэффициентами построить основанные на операторах сдвига черновские аппроксимации к решению задачи Коши, доказать равномерную сходимость аппроксимаций к решению и доказать, что решение может быть записано также как формула Фейнмана с интегральным ядром, содержащим обобщённые функции. Для параболического уравнения с переменными коэффициентами с пространственной координатой из бесконечномерного гильбертова пространства доказать существование разрешающей полугруппы, найти дающую решение задачи Коши формулу Фейнмана, доказать непрерывную зависимость решения от коэффициентов уравнения.

Новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Введено понятие функции, касательной по Чернову к оператору, и найдены методы построения таких функций.

2. Для параболического уравнения на вещественной прямой с переменными коэффициентами построены основанные на операторах сдвига черновские аппроксимации к решению задачи Коши, доказана равномерная сходимость аппроксимаций к решению. Доказано, что решение может быть записано также как формула Фейнмана с интегральным ядром, содержащим обобщённые функ-

ции.

3. Для параболического уравнения с переменными коэффициентами с пространственной координатой из бесконечномерного гильбертова пространства доказано существование разрешающей полугруппы, найдена дающая решение задачи Коши формула Фейнмана, доказана непрерывная зависимость решения от коэффициентов уравнения.

Положения, выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Введено понятие функции, касательной по Чернову к оператору, и найдены методы построения таких функций.

2. Для параболического уравнения на вещественной прямой с переменными коэффициентами построены основанные на операторах сдвига черновские аппроксимации к решению задачи Коши, доказана равномерная сходимость аппроксимаций к решению. Доказано, что решение может быть записано также как формула Фейнмана с интегральным ядром, содержащим обобщённые функции.

3. Для параболического уравнения с переменными коэффициентами с пространственной координатой из бесконечномерного гильбертова пространства доказано существование разрешающей полугруппы, найдена дающая решение задачи Коши формула Фейнмана, доказана непрерывная зависимость решения от коэффициентов уравнения.

Методы. В диссертации использованы методы бесконечномерного анализа и теории операторов, а также оригинальные авторские конструкции, относящиеся в целом к области функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в функциональном анализе, теории операторных полугрупп, теории уравнений с частными производными, а также в вычислительной математике.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах, конференциях и заседаниях:

- Научный семинар «Бесконечномерный анализ и математическая физика» на механико-математическом факультете МГУ, руководители О.Г.Смолянов и Е.Т.Шавгулидзе (многократно, 2008-2017 г.г.)
- Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ» (2011, 2012,

2013 гг., МГУ, Москва)

- Заседание Нижегородского математического общества (21 сентября 2012 г., Нижний Новгород)
- Третья международная конференция «Математическая физика и её приложения» (27 августа–01 сентября 2012 г., г. Самара)
- Научная конференция «Бесконечномерная динамика, диссипативные системы и аттракторы» (12–18 июля 2015 г., г. Нижний Новгород)
- Научный семинар «Топологические методы в динамике» кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ (ННФ) и лаборатории ТАПРАДЕСС (27.01.2017, 10.02.2017)
- XIV международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (с. Цей, 3-8 июля 2017 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах автора, в том числе в 4 статьях [68, 69, 70, 71] в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, из них 3 статьи [68, 70, 71] в журналах из баз данных SCOPUS и Web of Science. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх разбитых на параграфы глав и заключения. Объём текста диссертации составляет 82 страницы, библиография содержит 76 наименований. Чертежей и рисунков нет.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за всестороннюю поддержку и постановку решённой в главе 3 задачи, а также профессорам В.И.Богачеву, Е.И.Зеленову, Д.В.Тураеву, Е.Т.Шавгулидзе, Т.А.Шапошниковой за полезные обсуждения. Диссертационное исследование И.Д.Ремизова поддержано грантом РНФ 14-41-00044 в ННГУ имени Н. И. Лобачевского.

Глава 1

Черновские аппроксимации полугрупп операторов и их приложения к эволюционным уравнениям

В первой части настоящей главы обсуждаются свойства однопараметрических сильно непрерывных (полу)групп линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве, или, короче, C_0 -(полу)групп, необходимые для понимания их роли в теории эволюционных уравнений с частными производными. Все приводимые классические определения и утверждения снабжены ссылками и могут быть найдены, например, в учебниках [53, 47, 46, 29]. Формулируется теорема Чернова и понятие черновских аппроксимаций (построению таких аппроксимаций для уравнения теплопроводности посвящены вторая и третья главы).

Новыми в первой главе являются:

- определение касания по Чернову
- структуризация теоремы Чернова на его основе
- понятие формального решения в смысле Чернова
- две теоремы о построении функций, касательных по Чернову к сумме и произведению операторов (исчисление функций Чернова)

1.1 Полугруппы и их генераторы

Определение 1.1.1. Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство. Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть дано отображе-

ние

$$V: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}).$$

То есть, если $t \geq 0$ фиксировано, то $V(t)$ — это линейный ограниченный оператор, отображающий $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$. Отображение V называется C_0 -полугруппой, или, что то же самое, *сильно непрерывной однопараметрической полугруппой линейных ограниченных операторов*, если оно удовлетворяет трём условиям:

- 1) $V(0)$ это тождественный оператор I , т. е. $\forall \varphi \in \mathcal{F} : V(0)\varphi = \varphi$;
- 2) V сопоставляет сложению чисел в $[0, +\infty)$ композицию операторов в $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, т. е. $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0 : V(t + s) = V(t) \circ V(s)$, где использовано обозначение $(A \circ B)(\varphi) = A(B(\varphi))$ для каждого $\varphi \in \mathcal{F}$;
- 3) V непрерывно при наделении $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ сильной операторной топологией, т. е. $\forall \varphi \in \mathcal{F}$ функция $t \mapsto V(t)\varphi$ непрерывна как отображение $[0, +\infty) \rightarrow \mathcal{F}$.

Определение C_0 -группы получается заменой выше всюду $[0, +\infty)$ на $\mathbb{R}$.

Замечание 1.1.1. Множество $[0, +\infty)$ относительно сложения и множество $V([0, +\infty))$ относительно композиции операторов являются не только полугруппами, на самом деле это коммутативные моноиды, но термин «полугруппа» прижился и его используют повсеместно. В приложениях к эволюционным уравнениям работают не с самим множеством $V([0, +\infty))$, к чему вроде бы подталкивает термин « C_0 -полугруппа», а с отображением V . Т.е. на практике нам важен именно сам гомоморфизм $[0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$ полугрупп, а не только его образ. С алгебраической точки зрения V — это непрерывное представление полугруппы $[0, +\infty)$ в пространстве $\mathcal{F}$.

Замечание 1.1.2. Сильно непрерывные полугруппы представляют интерес не только сами по себе или как часть функционального анализа, но и благодаря своим приложениям в других областях математики (теория динамических систем, эргодическая теория, теория функциональных уравнений, теория приближений, список может быть продолжен достаточно далеко), а также в математической и теоретической физике. Литература по C_0 -полугруппам обширна: помимо множества статей на 2016 год существует около десяти специализированных монографий разных лет и разной степени подробности (см. [15, 53, 47, 46, 29] и ссылки там, а также вновь выходящие издания); кроме того, посвящённые C_0 -полугруппам главы имеются во всех учебниках функционального анализа продвинутого уровня и в некоторых книгах по квантовой теории. Приведём

два примера приложений теории непрерывных (полу)групп.

А) Известная теорема Стоуна утверждает, что всякой C_0 -группе унитарных операторов в гильбертовом пространстве взаимно-однозначно можно сопоставить самосопряжённый линейный оператор в этом пространстве. Тем самым она гарантирует существование и единственность решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера, основного уравнения квантовой механики, обосновывая допустимость его использования, см. оригинальную статью Стоуна [65] и любой учебник по квантовой физике.

Б) Если M — топологическое пространство (топология может возникать в связи с разными задачами и в каждом случае своя), то говорят, что функция $f: M \rightarrow M$ вкладывается в полугруппу $V: [0, +\infty) \rightarrow M^M$, если $(V(0))(z) = z$ и $V(1) = f$; при этом из пункта 2) определения 1.1.1 вытекает, что $V(2) = V(1+1) = V(1) \circ V(1) = f \circ f$, поэтому естественно определить дробную итерацию (композиционную степень) функции f , положив $f^{3/2} = V(3/2)$, из свежей литературы на эту тему см. например [12, 67]. Если же ограничиться рассмотрением только обратимых отображений $M \rightarrow M$, то можно строить итерации не только «вперёд», но и «назад», т.е. использовать не полугруппы, а группы. В примере Б) мы видим полугруппу, состоящую даже не из линейных операторов, а просто из непрерывных/гладких/аналитических функций $M \rightarrow M$, однако отображение $t \mapsto V(t)$ всё равно должно быть непрерывным в соответствующей задаче топологии пространства функций в M .

Примеры использования непрерывных полугрупп существуют в большом количестве, поэтому остановимся на этом, чтобы не слишком уклоняться от основного содержания диссертации.

Замечание 1.1.3. Положим $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ в определении 1.1.1, при этом окажется, что $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}$. Тогда (предложение 1.3 в [47]) существует такое единственное число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $V(t) = e^{\alpha t}$. Этот интуитивно понятный пример обсуждался ещё Огюстеном Коши (см. [47]) и является мотивацией для всей теории C_0 -полугрупп. Одномерная аналогия часто позволяет подобрать правильные формулы, которые представляют интерес в случае, когда пространство $\mathcal{F}$ бесконечномерно. Заметим здесь, что $\alpha = V'(0)$.

Замечание 1.1.4. Линейные операторы над конечномерным пространством $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$ — это матрицы $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^{n \times n}$. В этом случае каждая C_0 -полугруппа

задаётся (теорема 2.9 в [47]) уже не числом, а матрицей, и соответствие следующее: $V(t) = e^{At}$, где экспонента от матрицы определяется стандартным образом через степенной ряд. Заметим, что снова $A = V'(0)$. Оказывается, что и в случае бесконечномерного пространства $\mathcal{F}$ производная в нуле однозначно задаёт C_0 -полугруппу, о чём мы прямо сейчас и поговорим.

Определение 1.1.2. Если $(V(t))_{t \geq 0}$ — C_0 -полугруппа в банаховом пространстве $\mathcal{F}$, то линейный оператор $\mathcal{L}$, определенный равенством

$$\mathcal{L}\varphi = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t}$$

на линейном пространстве

$$\left\{ \varphi \in \mathcal{F} : \exists \lim_{t \rightarrow +0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t} \right\} \stackrel{\text{denote}}{=} \text{Dom}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}$$

называется инфинитезимальным генератором (или, короче, генератором) C_0 -полугруппы $(V(t))_{t \geq 0}$. При этом говорят, что оператор $\mathcal{L} : \text{Dom}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$ порождает полугруппу, и используют обозначение $V(t) = e^{t\mathcal{L}}$.

Замечание 1.1.5. Приводимые ниже определения и факты о замыкаемых операторах являются стандартными. Их можно найти в любом подробном учебнике функционального анализа (например, [5]), или в одной из многих монографий о неограниченных операторах.

Определение 1.1.3. Линейный оператор $\mathcal{L} : \mathcal{F} \supset \text{Dom}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$ называется:

- *замкнутым*, если его график $\Gamma_{\mathcal{L}} := \{(x, \mathcal{L}x) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : x \in \text{Dom}(\mathcal{L})\}$ это замкнутое подмножество в пространстве $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$, наделённом нормой $\|(x_1, x_2)\|_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}} := \|x_1\|_{\mathcal{F}} + \|x_2\|_{\mathcal{F}}$.

- *замыкаемым* (синоним: допускающим замыкание), если замыкание $\overline{\Gamma_{\mathcal{L}}}$ его графика $\Gamma_{\mathcal{L}}$ в пространстве $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}}$ является графиком некоторого оператора $(\mathcal{L}_1, \text{Dom}(\mathcal{L}_1))$, который в этом случае называется замыканием оператора $\mathcal{L}$ и обозначается $\overline{\mathcal{L}}$. То есть $\Gamma_{\overline{\mathcal{L}}} = \overline{\Gamma_{\mathcal{L}}}$. (Содержательным это определение делает тот факт, что $\overline{\Gamma_{\mathcal{L}}}$ может не быть графиком вообще никакого однозначного отображения при том, что $\Gamma_{\mathcal{L}}$ таковым являлся.)

Замечание 1.1.6. Если оператор $\overline{\mathcal{L}}$ существует, то он линеен, замкнут и является расширением оператора $\mathcal{L}$, т.е. $\text{Dom}(\mathcal{L}) \subset \text{Dom}(\overline{\mathcal{L}})$ и $\mathcal{L}|_{\text{Dom}(\mathcal{L})} = \overline{\mathcal{L}}|_{\text{Dom}(\mathcal{L})}$.

Замечание 1.1.7. Линейный оператор $\mathcal{L}: \mathcal{F} \supset Dom(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$ допускает замыкание тогда и только тогда, когда из того, что последовательность $(x_n) \subset Dom(\mathcal{L})$ сходится к $0 \in \mathcal{F}$ и того, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}x_n$, следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}x_n = 0$. При этом могут существовать такие сходящиеся к 0 последовательности $(y_n) \subset Dom(\mathcal{L})$, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}y_n$ не существует.

Замечание 1.1.8. Если линейный оператор $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$ допускает замыкание, то $x \in Dom(\overline{\mathcal{L}})$ в точности тогда, когда существует такая сходящаяся к x последовательность $(x_n) \subset Dom(\mathcal{L})$, что последовательность $\mathcal{L}x_n$ сходится; при этом $\overline{\mathcal{L}}x = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}x_n$.

Определение 1.1.4. Существенной областью определения замкнутого оператора $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$ называется такое линейное подпространство $\mathcal{D} \subset Dom(\mathcal{L})$, что замыкание оператора $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ равно $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$.

Предложение 1.1.1. (теорема 1.4 в [47], с. 51) Генератор C_0 -полугруппы является замкнутым линейным оператором с плотной областью определения, и однозначно определяет полугруппу.

Замечание 1.1.9. Если пространство $\mathcal{F}$ бесконечномерно, и при этом генератор C_0 -полугруппы $(V(t))_{t \geq 0}$ представляет собой ограниченный линейный оператор, то

1) отображение $V: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$ непрерывно не только в сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ (т.е. поточечно, при каждом $\varphi \in \mathcal{F}$), но и в обычной операторной топологии этого пространства, её ещё называют топологией нормы или равномерной топологией, задаётся она нормой $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|A\varphi\|_{\mathcal{F}}}{\|\varphi\|_{\mathcal{F}}}$, при этом полугруппу называют не сильно непрерывной, а равномерно непрерывной;

2) Известно (см. [47, 5]), что сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ с операторной топологией имеет место для каждого $A \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$. Это позволяет положить по определению $e^{t\mathcal{L}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathcal{L}^k}{k!}$, причём (как и в конечномерном случае) верно равенство $V(t) = e^{t\mathcal{L}}$.

Замечание 1.1.10. Если оператор $\mathcal{L}$ не ограниченный (например, таков лапласиан Δ , являющийся генератором C_0 -полугруппы, с помощью которой можно находить решения уравнения теплопроводности) то экспоненту от него нельзя определить сходящимся по норме в пространстве операторов рядом, т.к. не

удаётся доказать сходимость этого ряда стандартным способом. А именно, в случае неограниченного оператора A сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ нельзя извлечь из сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$, т.к. $\|A\| = \infty$. Поэтому в этом случае сама полугруппа и является экспонентой от оператора; по-видимому, более простого вида для экспоненты указать нет возможности. Впрочем, отличные от степенного ряда способы задания экспоненты существуют, и некоторые из них работают в случае, когда в показателе стоит неограниченный оператор. Тем не менее, мы не будем их рассматривать, а сосредоточимся на следующей задаче: получить оператор $V(t)$ при каждом $t > 0$ с помощью построения вспомогательного семейства операторов и аппроксимационной процедуры Чернова, это будет подробнее обсуждаться в следующих параграфах настоящей главы.

Определение 1.1.5. Линейный оператор $\mathcal{L}: \mathcal{F} \supset \text{Dom}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$ в банаховом пространстве $\mathcal{F}$ называется *диссипативным*, если для каждого $\lambda > 0$ и каждого $x \in \text{Dom}(\mathcal{L})$ справедлива оценка $\|\mathcal{L}x - \lambda x\| \geq \lambda \|x\|$.

Предложение 1.1.2. (*О замыкаемости плотноопределённого диссипативного оператора*) (предложение 3.14 в [47]) Линейный диссипативный оператор

$$\mathcal{L}: \mathcal{F} \supset \text{Dom}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$$

в банаховом пространстве $\mathcal{F}$ с областью определения $\text{Dom}(\mathcal{L})$, плотной в $\mathcal{F}$, обладает замыканием. Это замыкание

$$\overline{\mathcal{L}}: \mathcal{F} \supset \text{Dom}(\overline{\mathcal{L}}) \rightarrow \mathcal{F}$$

также представляет собой диссипативный оператор.

Определение 1.1.6. C_0 -полугруппа $(V(t))_{t \geq 0}$ называется *сжимающей*, если для каждого $t \geq 0$ справедливо неравенство $\|V(t)\| \leq 1$.

Теорема 1.1.1. (Lumer, Phillips, 1961; теорема 3.15 в [47]) Для диссипативного оператора $(\mathcal{L}, \text{Dom}(\mathcal{L}))$ на банаховом пространстве $\mathcal{F}$ следующие два условия эквивалентны:

1. Замыкание $\overline{\mathcal{L}}$ оператора $\mathcal{L}$ является генератором сжимающей полугруппы.
2. Образ оператора $\lambda I - \mathcal{L}$ плотен в $\mathcal{F}$ для некоторого (а, следовательно, и для любого) $\lambda > 0$.

Замечание 1.1.11. Таким образом, для диссипативного оператора вопрос о том, является ли он генератором какой-либо C_0 -полугруппы, сводится к проверке плотности образа некоторого вспомогательного оператора. Причём если ответ положительный, то мы впридачу получаем информацию о том, что порождаемая полугруппа сжимающая. На этой идее будут построены рассуждения в конце третьей главы. Теперь поговорим о связи C_0 -полугрупп и эволюционных уравнений.

1.2 Полугруппы и эволюционные уравнения

Предложение 1.2.1. (лемма 1.1 и определение 1.2. в [47], с. 48-49) Если оператор $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$ является генератором C_0 -полугруппы $(V(t))_{t \geq 0}$ в банаховом пространстве $\mathcal{F}$, то множество $Dom(\mathcal{L})$ совпадает с множеством тех $\varphi \in \mathcal{F}$, для которых отображение $t \mapsto V(t)\varphi$ дифференцируемо по t в каждой точке $t \in [0, +\infty)$.

Определение 1.2.1. 1. Система из двух условий

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{L}U(t); & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

для функции $U: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{F}$ называется абстрактной задачей Коши, ассоциированной с замкнутым линейным оператором $\mathcal{L}: \mathcal{F} \supset Dom(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$ и вектором $U_0 \in \mathcal{F}$. При этом первое условие называется эволюционным уравнением, а второе — начальным условием.

2. Функция $U: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{F}$ называется классическим решением абстрактной задачи Коши (1.1), если функция U имеет непрерывную производную

$$U': [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{F},$$

для каждого $t \geq 0$ выполняется $U(t) \in Dom(\mathcal{L})$, и имеет место (1.1).

3. Непрерывная функция $U: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{F}$ называется mild-решением абстрактной задачи Коши (1.1), если для каждого $t \geq 0$ выполняется

$$\int_0^t U(s)ds \in Dom(\mathcal{L}) \text{ и } U(t) = \mathcal{L} \int_0^t U(s)ds + U_0.$$

Предложение 1.2.2. (Предложение 6.2 в [47], с. 145) Если оператор $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $(V(t))_{t \geq 0}$, то:

1. Для каждого $V_0 \in Dom(\mathcal{L})$ существует единственное классическое решение абстрактной задачи Коши (1.1), даваемое формулой $U(t) = V(t)U_0$.

2. Для каждого $U_0 \in \mathcal{F}$ существует единственное mild-решение абстрактной задачи Коши (1.1), даваемое формулой $U(t) = V(t)U_0$.

Замечание 1.2.1. Применение абстрактной задачи Коши в теории эволюционных уравнений состоит в следующем. Если Q — это множество, то функцию

$$u: [0, +\infty) \times Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad u: (t, x) \mapsto u(t, x)$$

от двух переменных t, x можно представить в виде функции

$$u: t \mapsto u(t, \cdot) = [x \mapsto u(t, x)]$$

от одной переменной t со значениями в пространстве функций от переменной x . Если $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^Q$ и $u(t, \cdot) \in Dom(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}$ при всех $t \geq 0$, то можно определить

$$\mathcal{L}u(t, x) = (\mathcal{L}u(t, \cdot))(x).$$

При этом задача Коши

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = \mathcal{L}u(t, x) & \text{для } t > 0, x \in Q \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{для } x \in Q \end{cases} \quad (1.2)$$

становится очень похожа на задачу 1.1, если положить

$$U(t) = u(t, \cdot) \text{ и } U_0 = u_0(\cdot).$$

Если существует C_0 -полугруппа $(e^{t\mathcal{L}})_{t \geq 0}$, то задача 1.1 согласно предложению 1.2.2 имеет решение, и его можно принять за решение задачи 1.2. Эту мысль мы разовьём на примере в конце третьей главы.

Замечание 1.2.2. Поскольку при каждом $t \geq 0$ оператор $V(t)$ непрерывен и линеен, то решение $V(t)u_0$ задачи Коши непрерывно и линейно зависит от u_0 . Таким образом, существование C_0 -полугруппы с генератором $\mathcal{L}$ гарантирует, что задача 1.2 поставлена корректно по Тихонову: решение существует, единственно в некотором классе функций и непрерывно зависит от начального условия. Класс, в котором решение единственно, диктуется тем пространством, в котором действует полугруппа, а также способом соответствия между задачами 1.2 и 1.1. Фактически же, как уже отмечалось, соответствие состоит в том, что решением задачи 1.2 называется решение задачи 1.1.

Замечание 1.2.3. Удовлетворительный со всех точек зрения перевод термина «mild solution» на русский язык автору неизвестен. В литературе иногда в качестве такого перевода встречается термин «мягкое решение», но слово «мягкий» не имеет очевидного наглядного смысла, раскрывающего суть дела, и, кроме того, вызывает (по-видимому, зря) ассоциации с т.н. мягким анализом. Термин «слабое решение» также не годится, так как он уже занят и обозначает другое понятие. Возможно, в некотором смысле промежуточным между «сильным решением» и «слабым решением» было бы «умеренное решение», и это бы отражало суть дела, поскольку требования на mild solution не сильные и не слабые, а, так сказать, умеренные. Этот термин принадлежит автору диссертации, но даже ему он не вполне нравится. Понятие это в диссертации не ключевое и встречается нечасто, поэтому мы не будем использовать вообще никакого специального русского термина, переводя «mild solution» как «mild-решение».

1.3 Аппроксимации полугрупп полугруппами

Замечание 1.3.1. Ранее мы отметили, что в случае, когда генератор C_0 -полугруппы $(V(t))_{t \geq 0}$ является неограниченным оператором, простого способа вычислять $V(t)$ при каждом $t > 0$ нет. Однако, если пожертвовать точностью вычисления, т.е. провести процедуру аппроксимации, то $V(t)$ вычислять можно. Первым делом рассмотрим аппроксимации с помощью полугрупп, поскольку некоторые полугруппы всё же имеют простое явное описание, и их можно использовать для вычисления более сложно устроенных полугрупп.

Теорема 1.3.1. (*О связи аппроксимации генератора и аппроксимации полугруппы*) (теорема является частью утверждения второй аппроксимационной теоремы Троттера-Като, теорема 4.9 в [47])

Пусть $(e^{\mathcal{L}_n t})_{t \geq 0}$ — последовательность сильно непрерывных полугрупп операторов в банаховом пространстве $\mathcal{F}$ с генераторами $(\mathcal{L}_n, \text{Dom}(\mathcal{L}_n))$, удовлетворяющая при некоторых постоянных $M \geq 1, w \in \mathbb{R}$ условию $\|e^{\mathcal{L}_n t}\| \leq M e^{wt}$ при всех $t \geq 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть существует такой замыкаемый линейный оператор $(\mathcal{L}, \text{Dom}(\mathcal{L}))$ в $\mathcal{F}$ с плотной в $\mathcal{F}$ областью определения $\text{Dom}(\mathcal{L})$, что $\mathcal{L}_n x \rightarrow \mathcal{L}x$ для всех $x \in \text{Dom}(\mathcal{L})$. Пусть образ оператора $(\lambda_0 I - \mathcal{L})$ плотен в $\mathcal{F}$ при некотором $\lambda_0 > 0$. Тогда полугруппы $(e^{\mathcal{L}_n t})_{t \geq 0}, n \in \mathbb{N}$ сходятся сильно (и равномерно по $t \in [0, t_0]$ при любом фиксированном $t_0 > 0$) к сильно

непрерывной полугруппе $(e^{\bar{\mathcal{L}}t})_{t \geq 0}$ с генератором $\bar{\mathcal{L}}$. Иными словами, при любом фиксированном $t_0 > 0$ для каждого $x \in \mathcal{F}$ равномерно по $t \in [0, t_0]$ существует предел в левой части равенства и верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\bar{\mathcal{L}}_n t} x = e^{\bar{\mathcal{L}} t} x.$$

Замечание 1.3.2. Только что приведённая теорема может применяться в широком спектре ситуаций. В третьей главе мы её используем для обоснования непрерывной зависимости решения уравнения от его коэффициентов. Идея состоит в следующем: пусть дан оператор $\mathcal{L}$, и его коэффициенты — какие-то функции. Рассматриваем задачу Коши

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = \mathcal{L}u(t, x) & \text{для } t > 0, x \in Q, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{для } x \in Q. \end{cases}$$

Предположим, что мы немного возмущили коэффициенты. Вопрос: что будет происходить с решением уравнения? Ответ даёт теорема 1.3.1: если последовательность коэффициентов операторов $\mathcal{L}_j$ сходится к коэффициентам оператора $\mathcal{L}$, то сходятся будут и порождаемые полугруппы, а вместе с ними — и решения задач Коши, даваемые полугруппами. Таким образом, малым изменениям коэффициентов в задаче Коши будут соответствовать малые изменения решения.

Теорема 1.3.2. (Теорема Троттера, см. оригинальную статью [66] 1959 г. или следствие 10.7.22 в [5]) Пусть $(A, \text{Dom}(A))$ и $(B, \text{Dom}(B))$ — генераторы сжимающих C_0 -полугрупп в банаховом пространстве $\mathcal{F}$, причём $\text{Dom}(A) \cap \text{Dom}(B)$ плотно в $\mathcal{F}$. Пусть замыкание $(C, \text{Dom}(C))$ оператора $(A+B, \text{Dom}(A) \cap \text{Dom}(B))$ является генератором сжимающей C_0 -полугруппы $\mathcal{F}$. Тогда для каждого $f \in \mathcal{F}$ и каждого $t_0 > 0$ имеет место равномерная по $t \in [0, t_0]$ сходимост

$$e^{tC} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{tA/n} e^{tB/n} \right)^n f.$$

Замечание 1.3.3. В одномерном случае (при этом $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, а $A, B, C = A + B$ — числа) утверждение теоремы Троттера очевидно и прямо следует из свойств показательной функции. В конечномерном случае (при этом $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$, а A и B — матрицы $n \times n$) утверждение было установлено Софусом Ли в 1875 г.. Содержательность теоремы в случае, рассмотренном Троттером, проистекает из того, что пространство $\mathcal{F}$ может быть бесконечномерным, а операторы A и B — неограниченными.

Замечание 1.3.4. Условие о том, что все три полугруппы $e^{tA}, e^{tB}, e^{t(A+B)}$ сжимающие, не может быть отброшено с сохранением верности утверждения, на что указывает сам Троттер [66]. Это заметно ограничивает область применения теоремы, но мы использовать её и не будем, вместо неё нашим инструментом будет свободная от этого недостатка теорема Чернова, о которой пойдёт речь в следующем параграфе. Существует множество модификаций и обобщений формулы Троттера, в некоторых из этих обобщений полугруппы могут не быть сжимающими, но на них накладываются другие ограничения.

Замечание 1.3.5. Теорема Троттера сыграла важную роль в развитии математической физики, о чём нельзя не упомянуть. В 1948-51 годах Ричард Фейнман на физическом уровне строгости предложил [57, 56] конструкцию, известную сейчас как интеграл Фейнмана по траекториям. Конструкция оказалась весьма продуктивной: позволила ответить на ряд теоретических и практических вопросов, а также поставить новые; актуальна она и до сих пор. Тем не менее, вопрос удовлетворительного математического обоснования этой конструкции оставался открытым вплоть до 1964 г., когда Эдвард Нельсон с помощью теоремы Троттера дал такое обоснование [51] для рассмотренного Фейнманом частного случая. Теория интеграла Фейнмана и в начале XXI века активно развивается и применяется, в чём легко убедиться с помощью поисковых систем (слова для поиска: Feynman integral, path integral, continual integral). Один из подходов к этой проблематике основан на т.н. формулах Фейнмана (термин О.Г.Смолянова) и использует как базовый инструмент теорему Чернова, об истории исследований в этом направлении до 2009 года см. [58]. Вторая глава настоящей диссертации посвящена представлению решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с бесконечномерным пространством координат в виде формул Фейнмана.

1.4 Черновские аппроксимации полугрупп

Замечание 1.4.1. Сперва приведём теорему Чернова в неструктурированной формулировке. Заметим, что теорема Чернова пригодна для аппроксимации не только сжимающих полугрупп, кроме того, аппроксимирующее полугруппу семейство тоже не обязано быть сжимающим.

Теорема 1.4.1. (Теорема Чернова, см. оригинальную статью [43] 1968 г. или теорему 10.7.21 в учебнике [5]) Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство и $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть дана функция $G: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$, непрерывная на каждом векторе, причём $G(0) = I$ и $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ с некоторой постоянной $\omega \in \mathbb{R}$. Пусть есть такое плотное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ существует предел $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(G(t)f - f)$, значение которого будем обозначать символом $G'(0)f$. Предположим, что $G'(0)$ на $\mathcal{D}$ обладает замыканием C , и что C является генератором сильно непрерывной полугруппы $(e^{tC})_{t \geq 0}$. Тогда для каждого $f \in \mathcal{F}$ и каждого $t_0 > 0$ имеет место равномерная по $t \in [0, t_0]$ сходимости

$$e^{tC}f = \lim_{n \rightarrow \infty} G(t/n)^n f.$$

Замечание 1.4.2. Обратимся снова к одномерному примеру. В этом случае

$$\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathbb{R},$$

C — число, а условие дифференцируемости в нуле вырождается в то, что функция $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в окрестности нуля представима в виде

$$G(t) = 1 + tC + o(t).$$

Тогда утверждающая часть теоремы Чернова принимает вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(t/n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}C + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = e^{tC}.$$

Отсюда видно, что теорема Чернова — это аналог второго замечательного предела для операторнозначных функций.

Замечание 1.4.3. Если C — неограниченный оператор, то вычислять e^{tC} обычно трудно, поскольку, как мы видели ранее, задача вычисления e^{tC} равносильна решению задачи Коши

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = Cu(t, x) & \text{для } t > 0, x \in Q \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{для } x \in Q \end{cases}$$

для линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, при этом $u(t, x) = (e^{tC}u_0)(x)$. Однако, если мы располагаем подходящим семейством $(G(t))_{t \geq 0}$, то можно вычислять e^{tC} приближённо с помощью теоремы Чернова. Такой подход далее называется *аппроксимацией по Чернову*, сами выражения $G(t/n)^n$ — *черновскими аппроксимациями*, а функция G — *функцией Чернова оператора C* .

Замечание 1.4.4. Если оператор $G(t)$ — интегральный, то $G(t/2)^2 f$ — это результат применения к функции f интегрального оператора два раза подряд, т.е. это двухкратный повторный интеграл, который можно трактовать как двойной. Аналогично, $G(t/3)^3 f$ представляет собой тройной интеграл, а $G(t/n)^n f$ — n -кратный интеграл. Таким образом, при каждом $t > 0$ оказывается, что $e^{tC} f$ равно пределу кратных интегралов при кратности, стремящейся к бесконечности. Для выражений такого вида О.Г.Смоляновым [61] был введен теормин «формула Фейнмана», поскольку стоящие под знаком предела выражения являются аппроксимациями для интеграла Фейнмана по траекториям. Однако, как мы увидим в третьей главе диссертации, не только интегральные операторы могут играть роль функций Чернова.

Замечание 1.4.5. В заключение этого параграфа приведём ещё одну теорему, близкую к теореме Чернова, которая примечательна тем, что гарантирует существование полугруппы и налагает на функцию G более мягкие ограничения на рост нормы.

Теорема 1.4.2. (Теорема типа Чернова, [47], следствие 5.3 из теоремы 5.2) Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство, и $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ — пространство линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть дана функция

$$G: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}),$$

удовлетворяющая условию $G(0) = I$, где символом I обозначен тождественный оператор. Пусть числа $M \geq 1$ и $\omega \in \mathbb{R}$ таковы, что $\|G(t)^k\| \leq M e^{k\omega t}$ для всех $t \geq 0$ и каждого $k \in \mathbb{N}$. Пусть предел

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} =: \mathcal{L}\varphi$$

существует для всех $\varphi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, где $\mathcal{D}$ — это плотное подпространство в $\mathcal{F}$. Пусть также существует такое число $\lambda_0 > \omega$, что $(\lambda_0 I - \mathcal{L})(\mathcal{D})$ является плотным подпространством в $\mathcal{F}$.

Тогда замыкание $\overline{\mathcal{L}}$ оператора $\mathcal{L}$ является генератором C_0 -полугруппы $(V(t))_{t \geq 0}$, задаваемой равенством

$$V(t)\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(G\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n \varphi,$$

в котором предел для каждого $\varphi \in \mathcal{F}$ существует равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого фиксированного $t_0 > 0$. Более того, $(V(t))_{t \geq 0}$ для каждого $t \geq 0$ удовлетворяет оценке $\|V(t)\| \leq M e^{\omega t}$.

1.5 Формальные решения в смысле Чернова

Замечание 1.5.1. Теперь, следуя статьям [69, 70] автора диссертации, изложим теорему Чернова в другой форме. Содержание теоремы остаётся тем же, но условия теоремы разбиваются на блоки: (E)xistence – существование полугруппы, (C)hernoff (T)angency – касание по Чернову и (N)orm growth condition – оценка сверху на рост нормы. Сперва определим касание по Чернову.

Определение 1.5.1. Пусть $\mathcal{F}$ – банахово пространство, и пусть $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ – пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть дана функция $G: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$, или, что то же самое, семейство линейных ограниченных операторов $(G(t))_{t \geq 0}$ в $\mathcal{F}$. Пусть также дан замкнутый линейный оператор $\mathcal{L}: Dom(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$ с областью определения $Dom(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}$. Будем говорить, что функция G *касается по Чернову* (синоним: *черновски касается*) оператора $\mathcal{L}$, если выполняются следующие условия:

(СТ1). Функция G сильно непрерывна (=непрерывна при наделении $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ сильной операторной топологией), т. е. отображение $t \mapsto G(t)f \in \mathcal{F}$ непрерывно на $[0, +\infty)$ для каждого $f \in \mathcal{F}$;

(СТ2). $G(0) = I$, т. е. $G(0)f = f$ для каждого $f \in \mathcal{F}$;

(СТ3). Существует такое плотное в $\mathcal{F}$ линейное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ существует предел $\lim_{t \rightarrow 0} (G(t)f - f)/t$, значение которого обозначим символом $G'(0)f$;

(СТ4). Замыкание оператора $(G'(0), \mathcal{D})$ существует и равно $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$. Иными словами, $\mathcal{D}$ – существенная область определения оператора $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$.

Замечание 1.5.2. Часть формулировки определения касания по Чернову, предшествующая условиям (СТ1)-(СТ4), будем называть условием (СТ0).

Замечание 1.5.3. В определении касания по Чернову семейство $(G(t))_{t \geq 0}$ не обязано быть полугруппой. Однако, каждая C_0 -полугруппа черновски касается своего генератора. Теорема Чернова в свете данного определения принимает следующий вид.

Теорема 1.5.1. (Теорема Чернова в новой форме) Пусть $\mathcal{F}$ – банахово пространство и $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ – пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть даны функция $G: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$ (или, что то же самое, семей-

ство $(G(t))_{t \geq 0}$ и замкнутый линейный оператор $\mathcal{L} : Dom(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$ с областью определения $Dom(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}$. Пусть выполнены следующие условия:

(E). Существует C_0 -полугруппа $(e^{t\mathcal{L}})_{t \geq 0}$ с генератором $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$;

(CT). Функция G касается по Чернову оператора $\mathcal{L}$;

(N). Существует такое число $\omega \in \mathbb{R}$, что $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ при всех $t \geq 0$.

Тогда для каждого $f \in \mathcal{F}$ справедливо, что $(G(\frac{t}{n}))^n f \rightarrow e^{tL} f$ при $n \rightarrow \infty$, где предел равномерен по $t \in [0, t_0]$ при каждом фиксированном $t_0 > 0$. То есть для каждого $t_0 > 0$ и каждого $f \in \mathcal{F}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, t_0]} \left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n f - e^{tL} f \right\| = 0.$$

Замечание 1.5.4. Данное выше структурирование условий удобно тем, что условия из разных групп доказываются разными методами.

Существование (E) полугруппы может быть получено: а) непосредственно из свойств оператора $\mathcal{L}$, б) на основе того, что полугруппа получена ограниченным возмущением полугруппы, существование которой доказано, в) какими-то другими методами — например, если генератор удовлетворяет условию $\mathcal{L}^* = -\mathcal{L}$, то существование полугруппы гарантирует теорема Стоуна [65]. Все эти методы не зависят от выбора функции Чернова G , поскольку ответ на вопрос о том, существует полугруппа с генератором $\mathcal{L}$ или нет, полностью определяется свойствами именно оператора $\mathcal{L}$, а не тем, касательна ли к нему какая-то посторонняя функция G по Чернову и как быстро растёт $\|G(t)\|$ с ростом t . Иначе говоря, существование полугруппы с генератором $\mathcal{L}$ определяется тем, существует ли единственное решение задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором $\mathcal{L}$, а не тем, как мы пытаемся решать это уравнение.

Черновское касание (CT) доказывается средствами анализа. В практике применения теоремы Чернова выбор функции G и пространства $\mathcal{D}$, а иногда и пространства $\mathcal{F}$, тесно связаны между собой. Первое, о чём заботятся при попытке подобрать или построить подходящую функцию G , это именно черновское касание.

Условие на рост нормы (N) даже по своему виду отличается от условий (E) и (CT), так как представляет собой неравенство. Оно доказывается обычно путём оценивания интегралов и может быть довольно обременительным. Иногда даже приходится модифицировать уже построенную функцию G с тем, чтобы это условие выполнялось, но иногда этого можно добиться простой перенорми-

ровкой. В любом случае при борьбе за (N) нельзя отказываться от черновского касания, поэтому (СТ) заслуживает выделения в отдельную категорию.

Замечание 1.5.5. Как уже было сказано, в определении касания по Чернову семейство $(G(t))_{t \geq 0}$ не обязательно является полугруппой, но каждая C_0 -полугруппа касается по Чернову своего генератора и является его функцией Чернова. Именно отсутствие полугруппового свойства позволяет во многих случаях для данного оператора L с переменными коэффициентами подобрать задаваемую простой явной формулой функцию Чернова G , чтобы затем с помощью теоремы Чернова выразить полугруппу в виде $e^{tL} = \lim_{n \rightarrow \infty} G(t/n)^n$. Без обращения к технике функций Чернова задача о выражении e^{tL} через L сложна, т.к. эквивалентна решению задачи Коши для каждого $u_0 \in \mathcal{F}$.

Определение 1.5.2. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ такие же, как и выше. Две определённые обе на $[0, +\infty)$ (или обе на $\mathbb{R}$ соответственно) функции G_1 и G_2 со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ называются *эквивалентными по Чернову* (см. [52]), если $G_1(0) = G_2(0) = I$, и при всех $f \in \mathcal{F}$ и всех $T > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ (\text{соотв. } t \in [-T, T])}} \left\| \left(G_1 \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n f - \left(G_2 \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n f \right\| = 0.$$

Замечание 1.5.6. Существует несколько близких определений эквивалентности по Чернову [63, 52, 10] все они были предложены О.Г.Смоляновым в разные годы. Не углубляясь в их сравнение, мы следуем [52]. Единственное, что нам нужно от этого определения, состоит в следующем: если G_1 и $\mathcal{L}$ удовлетворяют всем условиям теоремы Чернова, то по теореме Чернова функция G_1 эквивалентна по Чернову функции $G_2(t) = e^{tL}$. Другими словами, предел выражения $(G_1(t/n))^n$ при стремлении n к бесконечности даёт сильно непрерывную полугруппу $(e^{tL})_{t \geq 0}$ (или группу $(e^{tL})_{t \in \mathbb{R}}$ соответственно).

Замечание 1.5.7. Следует отметить, что предложенный выше способ структурировать теорему Чернова, т.е. способ разбиения её условий на части, не единственный в своём роде. Другой подход предложила В.А.Дубравина [45], несколько вариантов были предложены О.Г.Смоляновым и его соавторами.

Замечание 1.5.8. Заметим, что приведённые выше определение касания по Чернову и теорема Чернова допускают два варианта формулировки: с неограниченным временем и с произвольно малым временем. Первая была приведена

выше. Вторая принадлежит О.Г. Смолянову и состоит в том, что в качестве временного промежутка используется не $[0, +\infty)$, а $[0, \delta)$ при фиксированном (но произвольно малом) $\delta > 0$. В этой формулировке функцию Чернова определяют не для всех $t \geq 0$, а только для достаточно малых, а неравенство $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ может быть заменено на $\|G(t)\| \leq 1 + \alpha t$. Мотивацией для использования второй формулировки служит то, что при построении черновских аппроксимаций величина t/n всё равно становится сколь угодно малой при $n \rightarrow \infty$. Формулировки эквивалентны между собой. В самом деле, из первой вытекает вторая, если учесть, что $1 + \alpha t \leq e^{\alpha t}$ при положительных α и t . В обратную же сторону требуется положить $\omega = \alpha/2$ и продолжить функцию Чернова с $[0, \delta)$ на $[0, +\infty)$ как угодно с сохранением нормы и непрерывности по t для выполнения условия (СТ1).

Определение 1.5.3. *Формальным решением в смысле Чернова задачи Коши*

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = \mathcal{L}u(t, x) & \text{для } t > 0, x \in Q, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{для } x \in Q. \end{cases}$$

называется выражение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (G(t/n)^n u_0)(x)$$

в случае, если функция G касается по Чернову оператора $\mathcal{L}$.

Замечание 1.5.9. Если функция G касается по Чернову оператора $\mathcal{L}$, но не эквивалентна по Чернову C_0 -полугруппе с генератором $\mathcal{L}$ или такой полугруппы вообще не существует (то есть, если в теореме Чернова выполнено условие (СТ), но хотя бы одно из двух условий (Е) или (N) не имеет места), то формальное решение не является решением в смысле определения 1.2.1.

1.6 Исчисление функций Чернова

Предложение 1.6.1. Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство, и функции G_1 и G_2 со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ черновски касаются действующих в $\mathcal{F}$ операторов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно (при этом в условии (СТ3) фигурируют плотные подпространства $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ соответственно). Пусть I — тождественный оператор в $\mathcal{F}$. Тогда функция

$$G(t) = G_1(t) + G_2(t) - I \tag{1.3}$$

черновски касается оператора $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, если он замкнут и имеет плотную в $\mathcal{F}$ существенную область определения $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

Доказательство. Проверим условия черновского касания. Для G условие (СТ1) следует из (СТ1) для G_1 и G_2 , а также того, что сумма непрерывных функций непрерывна. Условие (СТ2) проверяется непосредственно на основе (СТ2) для G_1 и G_2 : $G(0) = G_1(0) + G_2(0) - I = I + I - I = I$. Условие (СТ3) также проверяется непосредственно на основе (СТ3) для G_1 и G_2 и потребованной нами плотности $\mathcal{D}$ в $\mathcal{F}$: если $f \in \mathcal{D}$, то

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t) - I}{t} f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G_1(t) + G_2(t) - 2I}{t} f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G_1(t) - I}{t} f + \frac{G_2(t) - I}{t} f = \mathcal{L}f.$$

Условие (СТ4) следует из того, что $\mathcal{D}$ — существенная область определения оператора $\mathcal{L}$, что верно по условию предложения.

□

Замечание 1.6.1. Другой метод построения семейства, касательного по Чернову к сумме операторов, см. в теореме 2 из [7], см. также [32].

Предложение 1.6.2. Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство, и функции G_1 и G_2 со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ черновски касаются действующих в $\mathcal{F}$ операторов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно (при этом в условии (СТ3) фигурируют плотные подпространства $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ соответственно). Пусть оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ замкнут и имеет плотную в $\mathcal{F}$ существенную область определения $\mathcal{D} \subset \{f : f \in \mathcal{D}_2, \mathcal{L}_2 f \in \mathcal{D}_1\}$. Пусть G_2 имеет на $\mathcal{D}$ вторую производную в нуле, т.е. существует такой линейный оператор $G_2''(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$, что для каждого $f \in \mathcal{D}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ верно равенство

$$G_2(\varepsilon)f = f + \varepsilon \mathcal{L}_2 f + \frac{1}{2} \varepsilon^2 G_2''(0)f + \varepsilon^2 a(\varepsilon, f), \quad (1.4)$$

где $a(\varepsilon, f) = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим символом I тождественный оператор в $\mathcal{F}$. Тогда функция

$$G(t) = (G_1(\sqrt{t}) - I)(G_2(\sqrt{t}) - I) + I \quad (1.5)$$

черновски касается оператора $\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$.

Доказательство. Проверим условия черновского касания. Для G условия (СТ0) и (СТ1) следуют из условий предложения, (СТ1) для G_1 и G_2 , непрерывности функции $t \mapsto \sqrt{t}$, а также того, что сумма и композиция непрерывных

функций непрерывна. Условие (СТ2) проверяется непосредственно на основе (СТ2) для G_1 и G_2 :

$$G(0) = (G_1(\sqrt{0}) - I)(G_2(\sqrt{0}) - I) + I = I.$$

Условие (СТ3) проверим в четыре шага i)-iv), зафиксировав произвольный вектор $f \in \mathcal{D}$.

i) Если $f \in \mathcal{D}$, то $f \in \mathcal{D}_2$. Согласно (СТ3) для G_2 и (1.4) при $t \rightarrow 0$ справедливо представление

$$(G_2(\sqrt{t}) - I)f = G_2(\sqrt{t})f - f = \sqrt{t}\mathcal{L}_2f + \frac{1}{2}tG_2''(0)f + a(t, f)t, \quad (1.6)$$

причём $a(t, f) = o(1)$.

ii) Если $\varphi \in \mathcal{D}_1$, то в силу (СТ3) для G_2 имеем

$$(G_1(\sqrt{t}) - I)\varphi = G_1(\sqrt{t})\varphi - \varphi = \sqrt{t}\mathcal{L}_1\varphi + b(t, \varphi)\sqrt{t}, \quad (1.7)$$

где $b(t, \varphi) = o(1)$.

iii) Согласно условию (СТ1) для G_1 для каждого $\varphi \in \mathcal{F}$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} (G_1(\sqrt{t}) - I)\varphi = 0.$$

Значит $\sup_{t \in (0,1]} \|(G_1(\sqrt{t}) - I)\varphi\| = C_\varphi < +\infty$ для каждого $\varphi \in \mathcal{F}$. Поэтому по теореме Банаха-Штейнгауза (пространство $\mathcal{F}$ банахово по условию предложения) существует такая константа $C > 0$, что

$$\sup_{t \in (0,1]} \|G_1(\sqrt{t}) - I\| < C. \quad (1.8)$$

iv) На основе определения (1.5) функции G и равенства (1.6) имеем

$$\begin{aligned} G(t)f &= (G_1(\sqrt{t}) - I)(G_2(\sqrt{t})f - f) + f \\ &= (G_1(\sqrt{t}) - I) \left[\sqrt{t}\mathcal{L}_2f + t\frac{1}{2}G_2''(0)f + t\sqrt{t}a(t, f) \right] + f \\ &= f + \underbrace{(G_1(\sqrt{t}) - I) \sqrt{t}\mathcal{L}_2f}_{=tA} + \underbrace{t\frac{1}{2}(G_1(\sqrt{t}) - I)G_2''(0)f + t\sqrt{t}(G_1(\sqrt{t}) - I)a(t, f)}_{=tB} \end{aligned}$$

(в (1.7) положим $\varphi = \sqrt{t}\mathcal{L}_2f$)

$$= f + \sqrt{t}\mathcal{L}_1\sqrt{t}\mathcal{L}_2f + b(t, \sqrt{t}\mathcal{L}_2f)\sqrt{t} + tA + tB$$

(вынесем $\sqrt{t}$ за знаки операторов, все они однородны)

$$= f + t\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2f + tb(t, \mathcal{L}_2f) + tA + tB = f + t\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2f + t\left[b(t, \mathcal{L}_2f) + A + B\right].$$

Теперь покажем, что выражение в квадратных скобках стремится к нулю при $t \rightarrow 0$. Первое слагаемое стремится к 0 в силу (СТ3) для G_1 и (1.7), а второе — в силу (СТ1) для G_1 . В третьем слагаемом

$$B = \sqrt{t} \left(G_1(\sqrt{t}) - I \right) a(t, f)$$

в силу (1.8) при $t \in (0, 1]$ справедлива оценка $\|G_1(\sqrt{t}) - I\| \leq C$, и $a(t, f) = o(1)$ в силу (СТ3) для G_2 и (1.6). Таким образом, для каждого $f \in \mathcal{D}$ при $t \rightarrow 0$ справедливо представление

$$G(t)f = f + t\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2f + t[o(1) + o(1) + o(1)],$$

завершающее доказательство (СТ3) для G .

Условие (СТ4) для G следует из того, что $\mathcal{D}$ — существенная область определения оператора $\mathcal{L}$, что верно по условию предложения.

□

Замечание 1.6.2. Предложение 1.6.1 позволяет строить формальные (здесь и далее — в смысле Чернова) решения для уравнения $u'_t = L_1u + L_2u$, если известны функции G_1 и G_2 (иными словами, если известны формальные решения уравнений $u'_t = L_1u$ и $u'_t = L_2u$). Аналогично, предложение 1.6.2 предлагает способ построения формальных решений и для уравнения $u'_t = L_1L_2u$. Таким образом, вместе эти два предложения дают метод построения формального решения уравнения $u'_t = Lu$ в случае, когда L — произвольный дифференциальный оператор с коэффициентами, не зависящими от времени, поскольку он получается путём конечного числа сложений и произведений операторов дифференцирования $(L_1f)(x) = f'(x)$ и умножения на функцию $(L_2f)(x) = q(x)f(x)$, а функции Чернова этих операторов известны. При этом в зависимости от задачи есть возможность записать эти функции по-разному: как следует из условия (СТ3), функции, касательные по Чернову к одному оператору, на плотном в $\mathcal{F}$ подпространстве отличаются друг от друга лишь членами порядка $o(t)$. Кроме того, в работах О.Г.Смолянова и его учеников найдены функции Чернова многих операторов, построенных на базе лапласиана, см. [54, 39, 7, 45, 25] и ссылки там.

Глава 2

Построение решения одномерного параболического уравнения при помощи оператора сдвига

Предлагается метод решения задачи Коши для линейного параболического уравнения эволюционного типа с частными производными и переменными коэффициентами. Метод применяется к уравнению второго порядка (уравнению теплопроводности) с одномерной пространственной координатой и состоит в применении черновской аппроксимационной процедуры к специально построенному семейству операторов сдвига. Доказана равномерная сходимость аппроксимаций к точному решению. Выражение для решения истолковано как формула Фейнмана с сингулярным интегральным ядром.

2.1 Постановка задачи и предлагаемый подход

Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$ и поставим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = (a(x))^2 u''_{xx}(t, x) + b(x)u'_x(t, x) + c(x)u(t, x) = Hu(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.1)$$

Коэффициенты a , b , c , u_0 выше это ограниченные, равномерно непрерывные функции $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Глава посвящена выводу явной формулы, выражающей решение задачи (2.1) через a , b , c , u_0 в предположении того, что оператор H является генератором C_0 -полугруппы $(e^{tH})_{t \geq 0}$. Это предположение стандартно при изучении эволюционных уравнений, к которым относится уравнение теплопроводности. В соответствии с общей теорией C_0 -полугрупп [47] это предполо-

жение влечёт за собой, что решение задачи Коши (2.1) существует, ограничено и равномерно непрерывно по x при каждом t , непрерывно зависит от u_0 и может быть представлено в виде $u(t, x) = (e^{tH} u_0)(x)$. Мы применим теорему Чернова [43] к специально построенному для этой задачи семейству операторов $(S(t))_{t \geq 0}$ и выразим e^{tH} через a , b , c , достигая тем самым поставленную цель. Мы не обсуждаем задачу поиска класса функций, в котором решение единственно при некоторых предположениях о функциях a , b , c , u_0 , но имеем в виду, что для уравнение теплопроводности известны неограниченные решения.

Формула, дающая решение, приводится в теореме 2.3.2, см. также трактовку в терминах обобщённых функций в замечаниях 2.4.2 и 2.4.3.

2.2 Используемая техника

Теорема Чернова (см. главу 1 диссертации или [47, 43]) позволяет свести проблему нахождения e^{tH} к проблеме нахождения подходящей операторнозначной функции S , называемой функцией Чернова, и затем использовать формулу Чернова $e^{tH} = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t/n)^n$. Одно из преимуществ этого шага в том, что часто удаётся задать $S(t)$ явной формулой, зависящей от коэффициентов оператора H . Члены группы О.Г. Смолянова применяли эту технику, используя в качестве функций Чернова интегральные операторы, и нашли решения для параболических уравнений во многих ситуациях за последние 15 лет, см. пионерские работы [63, 61], обзор [58], введение в [69] и два неожиданных примера [45, 60]. Полученные авторами решения были представлены в виде формул Фейнмана, т.е. в виде предела кратного интеграла при стремлении кратности к бесконечности.

Отличительная черта результатов настоящей главы состоит в том, что при построении функции Чернова S вместо интегральных операторов мы используем операторы сдвига. Поэтому решение задачи Коши (2.1) представляется в виде выражения нового типа, не содержащего интегралы. Наш модельный пример (2.1) может быть модифицирован в различных направлениях. Он выбран достаточно простым (свободным от каких-либо специфических деталей или сложных особенностей) специально, чтобы позволить читателю сфокусироваться на основном содержании главы, т.е. на предлагаемом методе.

2.3 Основной результат

Замечание 2.3.1. Главным результатом третьей главы является формула (2.4), доказанная в теореме 2.3.2. Она содержит $\lim_{n \rightarrow \infty}$. После того, как предел вычислен, мы получаем решение задачи Коши (2.1). Для каждого фиксированного n выражение под знаком предела представляет собой приближение к решению, аппроксимацию. С ростом n эти приближения сходятся к точному решению равномерно по $x \in \mathbb{R}^1$ и по $t \in [0, t_0]$ для каждого фиксированного $t_0 > 0$.

Замечание 2.3.2. Обозначим множество всех (определённых на вещественной прямой и принимающих вещественные значения) ограниченных непрерывных функций символом $C_b(\mathbb{R})$. Множество тех из них, что равномерно непрерывны, обозначим символом $UC_b(\mathbb{R})$, а тех, что имеют ограниченные производные всех порядков, символом $C_b^\infty(\mathbb{R})$.

Тогда $C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset UC_b(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$, и по отношению к равномерной (чебышёвской) норме $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ первое вложение плотно, а два последних пространства банаховы.

Теорема 2.3.1. Для каждого $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $f \in C_b(\mathbb{R})$ и $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ положим

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{4}f\left(x + 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{4}f\left(x - 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{2}f(x + 2b(x)t) + tc(x)f(x), \quad (2.2)$$

$$(H\varphi)(x) = (a(x))^2\varphi''(x) + b(x)\varphi'(x) + c(x)\varphi(x). \quad (2.3)$$

Тогда по норме $\|g\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$ имеет место следующее:

- I) для каждого $t \geq 0$ и каждого $f \in C_b(\mathbb{R})$ верно $\|S(t)f\| \leq (1 + \|c\|t)\|f\|$.
- II) для каждого $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ верно $\lim_{t \rightarrow +0} \|S(t)f - f - tHf\|/t = 0$.
- III) если $t_n \rightarrow t_0$, $t_n \geq 0$ и $f \in UC_b(\mathbb{R})$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} \|S(t_n)f - S(t_0)f\| = 0$ для всех $t_0 \geq 0$.
- IV) если $a, b, c, f \in UC_b(\mathbb{R})$ то $S(t)f \in UC_b(\mathbb{R})$ для всех $t \geq 0$.

Доказательство. Будем для краткости писать $\sup$ вместо $\sup_{x \in \mathbb{R}}$.

I) $\|S(t)f\| = \sup \left| \frac{1}{4}f(x + 2a(x)\sqrt{t}) + \frac{1}{4}f(x - 2a(x)\sqrt{t}) + \frac{1}{2}f(x + 2b(x)t) + tc(x)f(x) \right| \leq \frac{1}{4} \sup |f(x + 2a(x)\sqrt{t})| + \frac{1}{4} \sup |f(x - 2a(x)\sqrt{t})| + \frac{1}{2} \sup |f(x + 2b(x)t)| + t \sup |c(x)| \sup |f(x)| \leq \frac{1}{4}\|f\| + \frac{1}{4}\|f\| + \frac{1}{2}\|f\| + t \sup |c(x)|\|f\| = (1 + \|c\|t)\|f\|$.

II) Фиксируем произвольный $x \in \mathbb{R}$ в (2.2). По формуле Тейлора разложим первые два слагаемых в (2.2) по степеням $\sqrt{t}$, а третье слагаемое по степеням t ; остаточные члены представим в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned}\varphi(x+2a(x)\sqrt{t}) &= \varphi(x) + 2a(x)\sqrt{t}\varphi'(x) + \frac{1}{2}\varphi''(x)(2a(x)\sqrt{t})^2 + \frac{1}{6}\varphi'''(\xi_1)(2a(x)\sqrt{t})^3, \\ \varphi(x-2a(x)\sqrt{t}) &= \varphi(x) - 2a(x)\sqrt{t}\varphi'(x) + \frac{1}{2}\varphi''(x)(2a(x)\sqrt{t})^2 - \frac{1}{6}\varphi'''(\xi_2)(2a(x)\sqrt{t})^3, \\ \varphi(x+2b(x)t) &= \varphi(x) + 2b(x)t\varphi'(x) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi_3)(2b(x)t)^2.\end{aligned}$$

Используя это и (2.2) запишем выражение для $(S(t)f)(x)$ и затем преобразуем его с помощью (2.3). Далее оценим $\sup |(S(t)f)(x) - f(x) - tHf(x)|$, принимая во внимание, что функции a, b ограничены, и также ограничены производные функции $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. Этим путём приходим к

$$(S(t)\varphi)(x) = \varphi(x) + t[(a(x))^2\varphi''(x) + b(x)\varphi'(x) + c(x)\varphi(x)] + o(t).$$

III) Функция a ограничена, поэтому $x + 2a(x)\sqrt{t_n} \rightarrow x + 2a(x)\sqrt{t_0}$ равномерно по x . Функция f равномерно непрерывна, поэтому $f(x + 2a(x)\sqrt{t_n}) \rightarrow f(x + 2a(x)\sqrt{t_0})$ равномерно по x .

IV) Если $t \geq 0$ фиксировано, то $[z \mapsto f(z + 2a(z)\sqrt{t})] \in UC_b(\mathbb{R})$ поскольку $a, f \in UC_b(\mathbb{R})$.

Замечание 2.3.3. Проведённое выше доказательство останется верным и для функций $N \rightarrow \mathbb{R}$ на произвольном банаховом пространстве N конечной или бесконечной размерности. Надо лишь заменить $C_b^\infty(\mathbb{R})$, $UC_b(\mathbb{R})$, $C_b(\mathbb{R})$ на $C_b^\infty(N, \mathbb{R})$, $UC_b(N, \mathbb{R})$, $C_b(N, \mathbb{R})$ и понимать производные в смысле Фреше.

Теорема 2.3.2. Пусть функции a, b, c лежат в пространстве $UC_b(\mathbb{R})$, наделённом нормой $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Предположим, что оператор H задан равенством (2.3) на своей области определения $C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset UC_b(\mathbb{R})$, и замыкание этого оператора: а) существует, б) является генератором C_0 -полугруппы $(e^{tH})_{t \geq 0}$ в $UC_b(\mathbb{R})$.

Тогда для каждого $u_0 \in UC_b(\mathbb{R})$ существует ограниченное (и равномерное непрерывное по $x \in \mathbb{R}$ при каждом $t \geq 0$) решение u задачи Коши (2.1), оно зависит от u_0 непрерывно и равномерно по $x \in \mathbb{R}$ для каждого $t \geq 0$. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ и каждого $t \geq 0$ это решение задаётся формулой

$$u(t, x) = (e^{tH}u_0)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(S(t/n) \right)^n u_0 \right)(x), \quad (2.4)$$

где $S(t/n)$ получается заменой t на t/n в равенстве (2.2), а n -я степень означает композицию n экземпляров линейного ограниченного оператора $S(t/n)$. Предел (2.4) при каждом фиксированном $t > 0$ берётся в пространстве $UC_b(\mathbb{R})$ и существует равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы Чернова. В теореме 1.5.1 и определении 1.5.1 положим $\mathcal{F} = UC_b(\mathbb{R})$, $G(t) = S(t)$, $\mathcal{L} = H$,

$\mathcal{D} = C_b^\infty(\mathbb{R})$. Условие (E) предполагается явно в условии доказываемой теоремы 2.3.2, условие (N) имеет место в силу пункта I) теоремы 2.3.1, в самом деле, при $\omega > 0$ и $t \geq 0$ справедливо неравенство $1 + \omega t \leq e^{\omega t}$, см. по этому поводу также замечание 1.5.8. Проверим условия черновского касания: (СТ1) следует из пунктов IV) и III) теоремы 2.3.1, (СТ2) вернов силу формулы (2.2), (СТ3) вытекает из пункта II) теоремы 2.3.1, (СТ4) предполагается в условиях 2.3.2.

Поэтому утверждение теоремы 2.3.2 вытекает из утверждения теоремы Чернова и предложения 1.2.2.

Замечание 2.3.4. Описанный метод можно использовать для решения уравнений типа (2.1), содержащих не только $\partial/\partial x$ и $\partial^2/\partial x^2$, но также и производные более высокого порядка: $\partial^3/\partial x^3$, $\partial^4/\partial x^4$ и т.д. Для этого нужно в формуле для S брать больше слагаемых и изменить коэффициенты, включив в формулу сдвиги, пропорциональные $t, t^{1/2}, t^{1/3}, t^{1/4}, \dots$

2.4 Формулы Фейнмана с обобщенными функциями

Замечание 2.4.1. Формулу (2.2) можно переписать в терминах обобщённых функций на основе того, что для δ -функции при каждом $w \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение $f(w) = \int_{\mathbb{R}} \delta(y - w) f(y) dy$. Получаем следующее равенство:

$$(S(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{4} \delta(y - x - 2a(x)\sqrt{t}) + \frac{1}{4} \delta(y - x + 2a(x)\sqrt{t}) + \frac{1}{2} \delta(y - x - 2b(x)t) + tc(x)\delta(y - x) \right] f(y) dy. \quad (2.5)$$

Замечание 2.4.2. Используя равенство (2.5), перепишем (2.4) в терминах обобщённых функций. Для удобства записи в формуле ниже обозначено $y_0 = x$.

$$\begin{aligned} u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S(t/n)^n f)(x) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}}}_n \left\{ \prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{4} \delta \left(y_k - y_{k-1} - 2a(y_{k-1}) \sqrt{\frac{t}{n}} \right) + \frac{1}{4} \delta \left(y_k - y_{k-1} + 2a(y_{k-1}) \sqrt{\frac{t}{n}} \right) + \frac{1}{2} \delta \left(y_k - y_{k-1} - 2b(y_{k-1}) \frac{t}{n} \right) + \frac{t}{n} c(y_{k-1}) \delta(y_k - y_{k-1}) \right] \right\} f(y_n) dy_n \dots dy_1. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Правая часть равенства (2.6) является формулой Фейнмана (т.е. пределом кратного интеграла, кратность которого стремится к бесконечности), однако под знаком интеграла стоят не гауссовские экспоненты, а дельта-функции. Это — строго обоснованный математически пример формулы Фейнмана с обобщёнными функциями в качестве интегрального ядра. Тем не менее, остаются вопросы о том, можно ли здесь переходить от повторного интеграла к кратному, а также некоторые другие. Мы понимаем равенство (2.6) так, что левая часть (корректно определённая через сдвиги) является определением для правой (содержащей дельта-функции); каким бы ни был спектр ответов на вопрос о том, как понимать такие кратные интегралы в общем случае, среди них точно должен быть вариант, указываемый нами, потому что наша конструкция является содержательным примером в связи с задачей Коши.

Замечание 2.4.3. Можно в интеграле

$$(S(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{4} \delta(y - x - 2a(x)\sqrt{t}) + \frac{1}{4} \delta(y - x + 2a(x)\sqrt{t}) + \frac{1}{2} \delta(y - x - 2b(x)t) + tc(x)\delta(y - x) \right] f(y) dy$$

сделать замену переменной $y = x + z$, тогда получим

$$\begin{aligned} (S(t)f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{4} \delta(z - 2a(x)\sqrt{t}) + \frac{1}{4} \delta(z + 2a(x)\sqrt{t}) + \frac{1}{2} \delta(z - 2b(x)t) + tc(x)\delta(z) \right] f(x + z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(z, x, t) f(x + z) dz, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\Phi(z, x, t) = \frac{1}{4} \delta(z - 2a(x)\sqrt{t}) + \frac{1}{4} \delta(z + 2a(x)\sqrt{t}) + \frac{1}{2} \delta(z - 2b(x)t) + tc(x)\delta(z).$$

Тогда получаем обычную для формул Фейнмана конструкцию, запишем её на этот раз в виде повторного интеграла, а не кратного:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S(t/n)^n f)(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \Phi(z_1, x, t/n) \int_{\mathbb{R}} \Phi(z_2, x + z_1, t/n) \int_{\mathbb{R}} \Phi(z_3, x + z_1 + z_2, t/n) \dots \\ &\dots \int_{\mathbb{R}} \Phi(z_n, x + z_1 + \dots + z_{n-1}, t/n) f(x + z_1 + \dots + z_n) dz_n \dots dz_1. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Глава 3

Формулы для решения бесконечномерного параболического уравнения, построенные с помощью интегрального оператора

3.1 Предварительные замечания

Дифференциальные уравнения относительно функций бесконечномерного аргумента связаны с теорией поля и теорией струн, теорией случайных процессов, а также некоторыми задачами финансовой математики [9, 23, 16]. Эволюционные уравнения (типа теплопроводности и типа Шрёдингера) в бесконечномерных пространствах привлекают внимание исследователей примерно с 60-х годов XX века (в частности, см. работы О.Г. Смолянова, Е.Т. Шавгулидзе, А.Ю. Хренникова, С. Альбеверио, точные ссылки даны ниже).

Существует множество статей, посвящённых этой тематике. Так, в частности, в [9] изучается уравнение Шрёдингера в гильбертовом пространстве. Уравнение содержит члены второго, первого и нулевого порядков, коэффициент при члене второго порядка постоянный. Решение задачи Коши даётся в виде формулы Фейнмана-Каца-Ито. Похожее уравнение в гильбертовом пространстве решается в [22] с помощью интеграла по конечно-аддитивной мере. В учебнике [44] разбирается решение уравнения теплопроводности в гильбертовом пространстве, без членов первого и нулевого порядка, коэффициент перед старшей производной постоянный. Решение даётся в виде свёртки с гауссовой мерой (полностью аналогично конечномерному уравнению теплопроводности с посто-

янными коэффициентами), доказано существование разрешающей полугруппы операторов. В работе [37] решение этого же уравнения даётся в виде формулы Фейнмана-Каца, см. также статьи [35, 36, 33, 34] того же автора. В [39] рассмотрено параболическое уравнение с переменными коэффициентами (уравнение диффузии — его частный случай) в конечномерном пространстве. В предположении, что для задачи Коши существует сильно непрерывная разрешающая полугруппа, авторы доказывают формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца, дающие это решение. В пространствах над полем p -адических чисел формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца для решений задачи Коши для эволюционных уравнений рассматривались в [30, 26, 25]. Дальнейшие ссылки см. в процитированных работах.

Следует отметить, что методы получения формул Фейнмана для возмущений полугрупп, разработанные в работах [8] и [40], могут, по-видимому, быть применимы к частному случаю (когда не равен нулю только член при старшей производной) рассмотренной в настоящей главе ситуации (в частности, существование и вид разрешающей полугруппы для уравнения с переменным коэффициентом при старшей производной можно попробовать извлечь из аналогичного факта для случая постоянного коэффициента), а также к поиску решений в классах функций, отличных от вводимых далее классов D_1 и F .

Излагаемые в третьей главе диссертации результаты продолжают и усиливают доказанное в [39]: рассмотрен бесконечномерный случай, и существование разрешающей полугруппы доказано.

3.2 Обозначения и определения

Символом H обозначим вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Основным рассматриваемым в диссертации случай — бесконечномерное пространство H , например, ℓ_2 , $L^2(\mathbb{R})$ или $L^2[0, 1]$. Тем не менее, получаемые формулы будут справедливы и в случае $H = \mathbb{R}^n$; этот случай был ранее рассмотрен [39] для уравнения несколько более общего вида. Мы же рассматриваем чуть более простое уравнение, зато позволяем пространству координат H быть бесконечномерным. Конкретная реализация пространства H (то есть явный вид множества H и способ вычисления $\langle \cdot, \cdot \rangle$) для нас будет неважна.

Линейный, ограниченный, самосопряжённый, положительный, невырожденный (и, следовательно, инъективный) оператор $A: H \rightarrow H$ определён всюду на H и имеет конечный след. Требование конечности следа оператора A означает следующее: для каждого ортонормированного базиса (e_k) в H конечна сумма $\sum_{k=1}^{\infty} \langle Ae_k, e_k \rangle = \text{tr} A$; эта сумма не зависит от выбора базиса (e_k) и называется следом оператора A .

Символ $C(M, N)$ обозначает множество всех непрерывных функций из M в N , где M и N это топологические пространства.

Функция $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ называется цилиндрической [13, 28], если найдутся такие векторы $e_1, \dots, e_n$ из H и такая функция $f^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, что для каждого $x \in H$ справедливо равенство $f(x) = f^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$. Иными словами, функция $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ цилиндрическая в точности тогда, когда в H существует такое линейное подпространство $H_n \subset H$ размерности n , что если $P: H \rightarrow H_n$ — это ортогональный проектор, то равенство $f(x) = f(Px)$ справедливо для каждого $x \in H$. Цилиндрическую функцию f можно мыслить себе как функцию, первоначально заданную только на H_n , а затем продолженную на всё H так, что $f(x) = f(x_0)$ для всех $x_0 \in H_n$ и всех $x \in (x_0 + \ker P)$.

Символом $D = C_{b,c}^{\infty}(H, \mathbb{R})$ обозначим пространство всех таких непрерывных, ограниченных, цилиндрических функций $H \rightarrow \mathbb{R}$, что их производные Фреше натурального порядка существуют в каждой точке пространства H , ограничены и непрерывны. При этом ограничивающая норму производной константа может зависеть от порядка производной.

Если $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема по Фреше [14], то символом $f'(x)$ будем обозначать первую производную Фреше функции f , вычисленную в точке x , а символом $f''(x)$ будем обозначать вторую производную Фреше в точке x . Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве позволяет для каждого $x \in H$ считать, что $f'(x) \in H$ — вектор из H , и $f''(x) \in \mathcal{L}(H)$ — линейный ограниченный оператор в H , подробнее об этом см. [14].

Символ $C_b(H, \mathbb{R})$ обозначает вещественное банахово пространство всех ограниченных непрерывных функций $H \rightarrow \mathbb{R}$, наделённое равномерной нормой $\|f\| = \sup_{x \in H} |f(x)|$.

Пусть $F = \overline{C_{b,c}^{\infty}(H, \mathbb{R})}$ это замыкание пространства D в $C_b(H, \mathbb{R})$. Ясно, что F с нормой $\|f\| = \sup_{x \in H} |f(x)|$ является банаховым пространством, поскольку

ку оно является замкнутым линейным подпространством банахова пространства $C_b(H, \mathbb{R})$. Функция f принадлежит классу F тогда и только тогда, когда существует такая последовательность функций $(f_j) \subset D$, $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$, т.е. $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in H} |f(x) - f_j(x)| = 0$.

Символ $C_b(H, H)$ обозначает банахово пространство всех ограниченных непрерывных функций $B: H \rightarrow H$, наделённое нормой $\|B\| = \sup_{x \in H} \|B(x)\|$.

Мы будем использовать следующее обозначение:

$$D_H = \{B: H \rightarrow H \mid \exists N \in \mathbb{N}, b_k \in H, B_k \in D : B(x) = B_1(x)b_1 + \dots + B_N(x)b_N\}.$$

Пусть F_H это замыкание D_H в $C_b(H, H)$.

Если $x \in H$, и линейный оператор $R: H \rightarrow H$ невырожденный, ядерный и положительный, то символ μ_R^x обозначает гауссовскую вероятностную меру [4, 13, 11] на H с математическим ожиданием x и корреляционным оператором R , т.е. такую единственную сигма-аддитивную меру на борелевской сигма-алгебре в H , что равенство $\int_H e^{i\langle z, y \rangle} \mu_R^x(dy) = \exp(i\langle z, x \rangle - \frac{1}{2}\langle Rz, z \rangle)$ выполняется при каждом $z \in H$. Для краткости будем писать μ_R вместо μ_R^0 .

Если даны векторное поле $B: H \rightarrow H$ и скалярные вещественные функции $g: H \rightarrow \mathbb{R}$ и $C: H \rightarrow \mathbb{R}$, то символ L обозначает следующий дифференциальный оператор в пространстве функций $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}$

$$(L\varphi)(x) := g(x)\text{tr}A\varphi''(x) + \langle \varphi'(x), AB(x) \rangle + C(x)\varphi(x), \quad x \in H.$$

Упорядоченная пара $(\mathcal{L}, M)$ обозначает оператор $\mathcal{L}$ с областью определения M . В дальнейшем мы докажем теорему 3.4.2, в которой утверждается, что $L(D) \subset F$ при выполнении некоторых условий на A , B , g и C . Тогда окажется, что (L, D) это линейный оператор $L: F \supset D \rightarrow F$ с плотной в F областью определения D . Здесь и далее пространства D и F наделаются равномерной нормой, индуцированной из $C_b(H, \mathbb{R})$. Пусть $(\bar{L}, D_1)$ это замыкание (L, D) в F . Это значит, что

$$D_1 = \{f \in F \mid \exists (f_j) \subset D : \lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f, \exists \lim_{j \rightarrow \infty} Lf_j\},$$

и для каждой функции $f \in D_1$ по определению $\bar{L}f = \lim_{j \rightarrow \infty} Lf_j$.

Если функция $u: [0, +\infty) \times H \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при каждом значении $t > 0$ имеет место включение $[x \mapsto u(t, x)] \in D_1$, тогда выражение $\bar{L}u(t, x)$ обозначает результат применения оператора $\bar{L}$ к функции $x \mapsto u(t, x)$ при фиксированном $t > 0$.

Выражение $(S_t)_{t \geq 0}$ обозначает однопараметрическое семейство линейных операторов, действующих в пространстве функций $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу

$$(S_t \varphi)(x) := e^{tC(x)} \int_H \varphi(x+y) e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) \text{ for } t > 0, \text{ and } S_0 \varphi := \varphi.$$

Замечание 3.2.1. Далее, в теореме 3.4.1, мы покажем, что при каждом $t \geq 0$ и удовлетворяющих некоторым условиям A , B , g и C верно следующее:

- i) $S_t(F) \subset F$,
- ii) оператор S_t ограниченный,
- iii) $\frac{d}{dt} S_t \varphi|_{t=0} = L\varphi$ для каждой $\varphi \in D$.

Это позволит нам использовать черновские аппроксимации (теоремы 1.4.1, 1.4.2) и доказать основной результат настоящей главы — теорему 3.4.4.

3.3 Вспомогательные конструкции

3.3.1 Мера и интеграл в гильбертовом пространстве

Лемма 3.3.1. ([13], Глава II, §2, 3°) Если функция $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}$ цилиндрическая и измеримая, т.е. $\varphi(x) = \varphi^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$ для некоторого числа $n \in \mathbb{N}$, некоторой измеримой функции $\varphi^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, некоторого конечного ортонормированного набора векторов $e_1, \dots, e_n$ пространства H , тогда

$$\int_H \varphi(y) \mu_A(dy) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \frac{1}{\sqrt{\det M_Q}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^n(z) \exp \left(-\frac{1}{2} \langle M_Q^{-1} z, z \rangle_{\mathbb{R}^n} \right) dz, \quad (3.1)$$

где $H_n = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$, и $P: H \ni h \mapsto \langle h, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle h, e_n \rangle e_n \in H_n$, $Q = PA$, $Q: H_n \rightarrow H_n$, а M_Q — это матрица оператора Q в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства H_n . Если $e_1, \dots, e_n$ представляет собой полный набор собственных векторов оператора Q , и $q_1, \dots, q_n$ — это соответствующие собственные числа, то

$$\int_H \varphi(y) \mu_A(dy) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n q_i}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^n(z_1, \dots, z_n) \exp \left(-\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{2q_i} \right) dz_1 \dots dz_n. \quad (3.2)$$

Лемма 3.3.2. (*Явный вид некоторых интегралов по гауссовской мере*)

Пусть сепарабельное вещественное гильбертово пространство H имеет конечную или бесконечную (наиболее интересующий нас случай) размерность.

Пусть линейный оператор $\tilde{A}: H \rightarrow H$ самосопряжён, положителен, невырожден и имеет конечный след. Тогда символом $\mu_{\tilde{A}}$ обозначим центрированную гауссовскую меру на H , имеющую корреляционный оператор $\tilde{A}$. Пусть линейный оператор $G: H \rightarrow H$ ограничен, а w и z — ненулевые векторы пространства H . Тогда справедливы следующие равенства:

$$\int_H \langle Gy, y \rangle \mu_{\tilde{A}}(dy) = \text{tr}(\tilde{A}G), \quad (3.3)$$

$$\int_H e^{\langle z, y \rangle} \mu_{\tilde{A}}(dy) = e^{\frac{1}{2}\langle \tilde{A}z, z \rangle}, \quad (3.4)$$

$$\int_H \langle w, y \rangle e^{\langle z, y \rangle} \mu_{\tilde{A}}(dy) = \langle \tilde{A}w, z \rangle e^{\frac{1}{2}\langle \tilde{A}z, z \rangle}, \quad (3.5)$$

$$\int_H \langle Gy, y \rangle e^{\langle z, y \rangle} \mu_{\tilde{A}}(dy) = (\text{tr} \tilde{A}G + \langle G\tilde{A}z, \tilde{A}z \rangle) e^{\frac{1}{2}\langle \tilde{A}z, z \rangle}. \quad (3.6)$$

Доказательство. Формулы (3.3) и (3.4) приводятся в [13], глава II, §2, 1°. Формула (3.5) может быть выведена на основе того, что стоящая под знаком интеграла функция цилиндрическая, поэтому можно применять лемму 3.3.1. Чтобы доказать (3.6), достаточно сделать в интеграле замену переменной $h = y - \tilde{A}w$, тогда ([13], глава II, §4, 2°, теорема 4.2) получаем $\mu_{\tilde{A}}(dy) = e^{-\frac{1}{2}\langle \tilde{A}w, w \rangle - \langle h, w \rangle} \mu_{\tilde{A}}(dh)$, и интеграл свёлся к (3.3).

Лемма 3.3.3. (*О линейной замене переменной в интеграле по гауссовской мере*) Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Пусть линейный оператор $A: H \rightarrow H$ положительный, ядерный, невырожденный и самосопряжённый. Обозначим символом μ_A центрированную гауссовскую меру на H с корреляционным оператором A . Для каждого $t > 0$ символ tA обозначает оператор, который на векторе $x \in H$ принимает значение $tAx \in H$. Пусть функция $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и интегрируема. Тогда

$$\int_H f(x) \mu_{tA}(dx) = \int_H f(\sqrt{t}x) \mu_A(dx). \quad (3.7)$$

Доказательство использует единственность гауссовской меры с заданным преобразованием Фурье и стандартную теорему о замене переменной в интеграле Лебега.

Лемма 3.3.4. (*Об интегрируемости многочлена, умноженного на экспоненту*) Пусть H, A, μ_A такие же, как и выше, и даны полином $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и число $\beta \in \mathbb{R}$.

Тогда функция $H \ni x \mapsto P(\|x\|)e^{\beta\|x\|} \in \mathbb{R}$ интегрируема по мере μ_A .

Докзательство легко построить на основе теоремы Ферника [48], которая (применённая к данному случаю) утверждает, что существуют такое число $\alpha > 0$, что $\int_H e^{\alpha\|y\|^2} \mu_A(dy) < +\infty$.

3.3.2 Дифференцирование в гильбертовом пространстве

Предложение 3.3.1. Пусть функция f цилиндрическая, принимает вещественные значения и определена на H . То есть существуют такое число $n \in \mathbb{N}$ и функция $f^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, что для каждого $x \in H$ справедливо равенство $f(x) = f^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$. Набор векторов $e_1, \dots, e_n$ можно считать ортонормированным без ограничения общности. Дополним его до ортонормированного базиса $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ в H .

Тогда:

1. функция f дифференцируема по направлению $h \in H$ тогда и только тогда, когда функция f^n дифференцируема по направлению $(\langle h, e_1 \rangle, \dots, \langle h, e_n \rangle) \in \mathbb{R}^n$, и

$$f'(x)h = \left\langle h, \left(\partial_1 f^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle), \dots, \partial_n f^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle), 0, 0, 0, \dots \right) \right\rangle,$$

где символом $\partial_j f^n$ обозначена частная производная по j -му аргументу функции f^n , и $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, 0, 0, \dots) = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. Если функция f дифференцируема по Фреше в точке x , тогда $f'(x)$ — вектор, у которого первые n координат представляют градиент функции f^n , а остальные координаты — нули:

$$f'(x) = \left(\partial_1 f^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle), \dots, \partial_n f^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle), 0, 0, 0, \dots \right). \quad (3.8)$$

2. функция f дифференцируема по Фреше всюду в H тогда и только тогда, когда функция f^n дифференцируема всюду в $\mathbb{R}^n$.

3. Пусть оператор $A: H \rightarrow H$ ядерный (т.е. пусть $\text{tr} A < \infty$). Тогда

$$\text{tr} A f''(x) = \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \langle A e_s, e_k \rangle \left(\partial_k \partial_s f^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \right) = \quad (3.9)$$

$$= \operatorname{tr} \left(A_n(f^n)''(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \right),$$

где A_n — это матрица оператора PA в базисе $e_1, \dots, e_n$, где P — это проектор на линейную оболочку векторов $e_1, \dots, e_n$.

Доказательство состоит в непосредственном применении определения производной.

Предложение 3.3.2. Для $(n+1)$ раз дифференцируемой по Фреше функции $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ справедливо [27, 6] разложение по формуле Тейлора

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x)h + \frac{1}{2!} f''(x)(h, h) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(h, \dots, h) + R_n(x, h), \quad (3.10)$$

причём

$$|R_n(x, h)| \leq \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{z \in [x, x+h]} \|f^{(n+1)}(z)\|. \quad (3.11)$$

3.3.3 Дифференциальный оператор в конечномерном пространстве

Лемма 3.3.5. ([50], теоремы 4.3.1, 4.3.2 и следствие 4.3.4) Пусть для каждого $i = 1, \dots, n$ и каждого $j = 1, \dots, n$ даны функции $a^{ij}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $b^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ из пространства $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, где $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ — это класс всех ограниченных вещественнозначных функций на $\mathbb{R}^n$, имеющих ограниченные частные производные всех порядков. Пусть также $c(x) \leq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Для $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ определим дифференциальный оператор T формулой

$$(Tu)(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + c(x)u(x).$$

Пусть существует такое число $\varkappa > 0$, что для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие эллиптичности: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \varkappa \|\xi\|^2$. Фиксируем произвольные число $\lambda > 0$ и функцию $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Тогда:

1. Существует единственная функция $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, являющаяся решением уравнения

$$(Tu)(x) - \lambda u(x) = f(x). \quad (3.12)$$

2. Для каждой функции $v \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ справедлива оценка

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(Tv)(x) - \lambda v(x)| \geq \lambda \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |v(x)|. \quad (3.13)$$

Заметим, что лемма не утверждает, что уравнение (3.12) имеет только ограниченные решения.

3.3.4 Свойства пространств D , F , D_1

Замечание 3.3.1. Из определений этих пространств непосредственно следует, что

- i) $D \subset D_1 \subset F \subset C_b(H, \mathbb{R})$;
- ii) D и D_1 плотны в F ;
- iii) Пространство F банахово.

Предложение 3.3.3. Если $f \in D$, тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство. Из определения пространства D следует, что функция $D \ni f: H \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена, имеет производные Фреше всех порядков и эти производные также ограничены. В частности, существует

$$\sup_{x \in H} \|f'(x)\| = M < \infty. \quad (3.14)$$

Если подставить $n = 0$ в формулу Тейлора (3.10), то можно заметить, что для каждого $x \in H$ и каждого $y \in H$ существует такое вещественное число $R_1(x, y)$, что

$$f(x) - f(y) = R_1(x, y), \quad (3.15)$$

и при этом

$$|R_1(x, y)| \stackrel{(3.11)}{\leq} \frac{\|y - x\|^1}{1!} \sup_{z \in [x, y]} \|f'(z)\| \stackrel{(3.14)}{\leq} M \|x - y\|. \quad (3.16)$$

Следовательно, для каждого $x \in H$ и каждого $y \in H$ справедливы соотношения

$$|f(x) - f(y)| \stackrel{(3.15)}{=} \|R_1(x, y)\| \stackrel{(3.16)}{\leq} M \|x - y\|, \quad (3.17)$$

из которых следует равномерная непрерывность функции f .

□

Предложение 3.3.4. Если $\varphi \in F$, то функция φ равномерно непрерывна.

Доказательство. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Попробуем найти такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|x - y\| < \delta$ будет следовать неравенство $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$. Поскольку $\varphi \in F$, существует последовательность функций $(f_j) \subset D$,

сходящаяся к φ равномерно. Следовательно, существует такое число j_0 , что (вводя обозначение $f_{j_0} = f$) мы обнаруживаем, что

$$\|\varphi - f_{j_0}\| = \|\varphi - f\| = \sup_{x \in H} |\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.18)$$

Более того, так как $f \in D$, то из предложения 3.3.3 вытекает оценка (3.17) с некоторым $M > 0$. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{3M}$ и заметим, что $\|x - y\| < \delta$. Тогда

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - \varphi(y)| \stackrel{(3.17), (3.18)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + M \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Предложение 3.3.5. Пусть последовательность функций $(f_j)_{j=1}^\infty \subset F$ сходится равномерно к функции $f_0 \in F$. Тогда семейство функций $(f_j)_{j=0}^\infty$ равномерно непрерывно.

Доказательство. Пусть число $\varepsilon > 0$ задано. Постараемся найти такое $\delta > 0$, что как только $\|x - y\| < \delta$, так сразу $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.

Согласно предложению 3.3.4, функция f_j равномерно непрерывна для каждого $j = 0, 1, 2, \dots$. Значит, для каждого $j = 0, 1, 2, \dots$ существует такое $\delta_j > 0$ что из $\|x - y\| < \delta_j$ следует

$$|f_j(x) - f_j(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.19)$$

Так как сходимость $f_j \rightarrow f_0$ равномерна, то существует такое j_0 что при всех $j > j_0$ имеем

$$\sup_{x \in H} |f_0(x) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.20)$$

Положим $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{j_0})$. Тогда при $j > j_0$ из $\|x - y\| < \delta$ вытекает

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq |f_j(x) - f_0(x)| + |f_0(x) - f_0(y)| + |f_0(y) - f_j(y)| \stackrel{(3.19), (3.20)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Если же $0 \leq j \leq j_0$, то из неравенства $\|x - y\| < \delta$ вытекает оценка (3.19), которая даже сильнее, чем та, что требуется.

□

Предложение 3.3.6. Функция из F , отличная от константы, не может иметь предел на бесконечности. В частности, функция $x \mapsto \exp(-\|x\|^2)$ принадлежит $C_b(H, \mathbb{R})$, но не принадлежит F .

Доказательство. Число a называется пределом функции $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ на бесконечности, если

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{\|x\| \geq R} |f(x) - a| = 0. \quad (3.21)$$

Пусть сперва $f \in D$. Тогда найдутся такие n -мерное подпространство $H_n \subset H$ и ортогональный проектор $P: H \rightarrow H_n$, что $f(x) = f(Px)$ для каждого $x \in H$. Функцию f можно себе мыслить как функцию, заданную на H_n , а затем продолженную на всё пространство H так, что $f(x) = f(x_0)$ для $x_0 \in H_n$ и $x \in (x_0 + \ker P)$.

Так как $f \neq \text{const}$, то найдутся такое число $\varepsilon_0 > 0$ и такие точки $x_1 \in H_n$ и $x_2 \in H_n$, что $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon_0$. Но тогда $|f(x_1 + y) - f(x_2 + y)| > \varepsilon_0$ для каждого $y \in \ker P$, в частности и при $\|x_1 + y\| \geq R$, $\|x_2 + y\| \geq R$, что противоречит существованию предела (3.21).

Пусть теперь $f \in F$. Тогда существует последовательность функций $(f_j) \subset D$, сходящаяся к f равномерно. Найдётся такой номер j , что $\|f - f_j\| < \frac{\varepsilon_0}{8}$. В силу этого $|f_j(x_1) - f_j(x_2)| > \frac{3\varepsilon_0}{4}$ и $|f_j(x_1 + y) - f_j(x_2 + y)| > \frac{3\varepsilon_0}{4}$ для каждого $y \in \ker P$ и двух точек x_1, x_2 пространства H_n , построенного по функции f_j . Но поскольку $\|f - f_j\| < \frac{\varepsilon_0}{8}$, справедлива оценка $|f(x_1 + y) - f(x_2 + y)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$, противоречащая существованию предела (3.21).

□

Предложение 3.3.7. Рассмотрим последовательность $\alpha_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ бесконечно-гладких функций, равномерно ограниченных вместе со своими первой и второй производными:

$$\sup_{p \in \{0,1,2\}} \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^p \alpha_k(t)}{dt^p} \right| \leq M \equiv \text{const}.$$

Например, $\alpha_k(t) = \sin(d_k(t - t_k))$, где числа d_k и t_k зависят только от k , и выполняется неравенство $0 < d_k \leq 1$. Пусть числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится абсолютно. Пусть набор векторов $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в H .

Тогда функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \alpha_k(\langle x, e_k \rangle)$$

находится в классе D_1 .

Это утверждение может быть легко распространено на случай $\alpha_k: \mathbb{R}^{n_k} \rightarrow \mathbb{R}$.

Доказательство. То, что частичные суммы задающего функцию f ряда — гладкие цилиндрические функции на H , следует из построения и определения цилиндрической функции. Ряд сходится равномерно по $x \in H$, поэтому $f \in F$. Осталось проверить, что к функции f можно применять оператор L . Несложно видеть, что функция Lf задаётся рядом, сходимостъ которого следует из равномерной ограниченности производных функций α_k .

□

Замечание 3.3.2. Пространство D не сепарабельно (не имеет счётного всюду плотного подмножества). В случае одномерного H это может быть доказано так же, как в учебниках обычно доказывается несепарабельность пространства $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Если же $\dim H > 1$, то $\mathbb{R}^1$ можно вложить в H как линейную оболочку некоторого ненулевого вектора $e \in H$. На основе этого вложения можно вложить в пространство D множество цилиндрических функций, отвечающее за несепарабельность D в случае одномерного H .

Замечание 3.3.3. Из замечания 3.3.2 и вложения $D \subset D_1 \subset F$ следует, что пространства D_1 и F тоже не сепарабельны.

3.4 Основные результаты

3.4.1 Семейство S_t является функцией Чернова для полугруппы с генератором $\bar{L}$

Теорема 3.4.1. (*О свойствах семейства $(S_t)_{t \geq 0}$ и его связи с оператором L*)

Пусть $g \in F$, и для каждого $x \in H$ справедлива оценка снизу $g(x) \geq g_0 \equiv \text{const} > 0$. Пусть $B \in F_H$ и $C \in F$. Пусть для каждого $t > 0$ символ $\mu_{2tg(x)A}$ обозначает центрированную гауссовскую меру на H с корреляционным оператором $2tg(x)A$.

Для $\varphi \in C_b(H, \mathbb{R})$ обозначим $S_0\varphi := \varphi$, а для $t > 0$ положим

$$(S_t\varphi)(x) := e^{tC(x) - t \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)}} \int_H \varphi(x + y) e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy). \quad (3.22)$$

Тогда:

1. Если $t \geq 0$ и $\varphi \in C_b(H, \mathbb{R})$, то $S_t\varphi \in C_b(H, \mathbb{R})$. Для каждого $t \geq 0$ оператор $S_t: C_b(H, \mathbb{R}) \rightarrow C_b(H, \mathbb{R})$ линеен и ограничен; его норма не превышает $e^{\left(\frac{2\|A\|\|B\|^2}{g_0} + \|C\|\right)t}$.

2. Если $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$, то пространство D для каждого $t \geq 0$ инвариантно по отношению к оператору S_t .

3. Если $g \in F$, $C \in F$, $B \in F_H$, то пространство F для каждого $t \geq 0$ инвариантно по отношению к оператору S_t .

4. Для каждой функции $\varphi \in D$ при $g \in F$, $C \in F$, $B \in F_H$ равномерно по $x \in H$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(S_t \varphi)(x) - \varphi(x)}{t} = g(x) \operatorname{tr} A \varphi''(x) + \langle \varphi'(x), AB(x) \rangle + C(x) \varphi(x) = (L\varphi)(x).$$

5. Если $\varphi \in F$, $g \in F$, $C \in F$, $B \in F_H$, то функция $[0, +\infty) \ni t \mapsto S_t \varphi \in F$ непрерывна, т.е. выполнение условий $t_0 \geq 0$, $t_n \geq 0$ и $t_n \rightarrow t_0$ влечёт за собой $\sup_{x \in H} |(S_{t_n} \varphi)(x) - (S_{t_0} \varphi)(x)| \rightarrow 0$.

Доказательство.

1. Функция φ ограничена, поэтому интеграл (3.22) существует по лемме 3.3.4. Фиксируем число $t > 0$ и функцию $\varphi \in C_b(H, \mathbb{R})$. Делая в интеграле замену переменной в соответствии с леммой 3.3.3, получаем

$$\int_H \varphi(x+y) e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) = \int_H \varphi\left(x + \sqrt{2tg(x)}y\right) e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), \sqrt{2tg(x)}y \rangle} \mu_A(dy).$$

Вводя обозначение $\|B\| = \sup_{x \in H} \|B(x)\|$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \|S_t \varphi\| &= \sup_{x \in H} \left| e^{tC(x) - \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t} \int_H \varphi\left(x + \sqrt{2tg(x)}y\right) e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), \sqrt{2tg(x)}y \rangle} \mu_A(dy) \right| \leq \\ &\sup_{x \in H} \left| e^{tC(x) - \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t} \right| \sup_{x \in H} |\varphi(x)| \sup_{x \in H} \int_H e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}} B(x), y \rangle} \mu_A(dy) \stackrel{(3.4)}{=} \\ &e^{t(\|C\| + \|\frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)}\|)} \|\varphi\| \sup_{x \in H} e^{\frac{1}{2} \frac{2t}{g(x)} \langle AB(x), B(x) \rangle} \stackrel{\langle x_1, x_2 \rangle \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\|}{\leq} e^{\left(\frac{2\|A\|\|B\|^2}{90} + \|C\|\right)t} \|\varphi\|, \end{aligned} \tag{3.23}$$

из которой следует, что функция $x \mapsto (S_t \varphi)(x)$ ограничена. Докажем, что она также и непрерывна. В самом деле, если $x_j \rightarrow x$, то для каждого $y \in H$ верно

$$\varphi\left(x_j + \sqrt{2tg(x_j)}y\right) e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x_j)}} B(x_j), y \rangle} \rightarrow \varphi\left(x + \sqrt{2tg(x)}y\right) e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}} B(x), y \rangle}.$$

Более того, $\left| \varphi\left(x_j + \sqrt{2tg(x_j)}y\right) e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x_j)}} B(x_j), y \rangle} \right| \leq \|\varphi\| e^{\sqrt{\frac{2t}{90}} \|B\| \|y\|}$, и аналогично

$$\left| \varphi\left(x + \sqrt{2tg(x)}y\right) e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}} B(x), y \rangle} \right| \leq \|\varphi\| e^{\sqrt{\frac{2t}{90}} \|B\| \|y\|}.$$

Из леммы 3.3.4 вытекает, что функция $y \mapsto e^{\sqrt{\frac{2t}{g_0}} \|B\| \|y\|}$ интегрируема по мере μ_A . Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_H \varphi \left(x_j + \sqrt{2tg(x_j)}y \right) e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x_j)}} B(x_j), y \right\rangle} \mu_A \\ = \int_H \varphi \left(x + \sqrt{2tg(x)}y \right) e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}} B(x), y \right\rangle} \mu_A. \end{aligned}$$

В силу непрерывности функций C, B, g и неравенства $g(x) \geq g_0 > 0$ имеем $e^{tC(x_j) - \frac{\langle AB(x_j), B(x_j) \rangle}{g(x_j)}t} \rightarrow e^{tC(x) - \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)}t}$. Значит, $(S_t \varphi)(x_j) \rightarrow (S_t \varphi)(x)$. Итак, мы доказали, что $S_t \varphi \in C_b(H, \mathbb{R})$. Оценка (3.23) показывает, что

$$\|S_t\| \leq \exp\left(\frac{2\|A\|\|B\|^2}{g_0} + \|C\|\right)t.$$

2. Зафиксируем $t > 0$ и покажем, что $S_t \varphi \in D$.

i) Сперва заметим, что при $g \in D, C \in D, B \in D_H$ оператор S_t сопоставляет цилиндрической функции φ цилиндрическую функцию $S_t \varphi$. Это непосредственно следует из того, что (3.22) представляет собой цилиндрическую функцию от цилиндрических функций, зависящих от конечного числа линейных функционалов, аргументом которых является x .

Следовательно, число $(S_t \varphi)(x)$ зависит от x лишь через посредство конечного числа линейных функционалов. Это и означает, что функция $x \mapsto (S_t \varphi)(x)$ цилиндрическая; вный вид указанной зависимости от x мы приведём ниже в (3.25).

ii) Введём несколько обозначений. Поскольку функция φ цилиндрическая, существуют такие число $n \in \mathbb{N}$, функция $\varphi^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и набор лежащих в пространстве H векторов $e_1, \dots, e_n$, что равенство $\varphi(x) = \varphi^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$ справедливо для каждого $x \in H$. Функции g, C, B также цилиндрические, поэтому без потери общности мы можем принять, что набор векторов $e_1, \dots, e_n$ ортонормирован и столь велик, что справедливо следующее:

$$\begin{aligned} g(x) &= g^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle), \\ C(x) &= C^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle), \\ B(x) &= B_1(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)e_1 + \dots + B_n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)e_n. \end{aligned}$$

На данном этапе векторы $e_1, \dots, e_n$ могут быть произвольно расположены по отношению к собственным векторам оператора A .

Введём следующие обозначения:

$\Psi_n: H \ni h \mapsto (\langle h, e_1 \rangle, \dots, \langle h, e_n \rangle) \in \mathbb{R}^n$ — проектор,

$H_n = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ — подпространство в H ,

$I_n: H_n \ni h \mapsto (\langle h, e_1 \rangle, \dots, \langle h, e_n \rangle) \in \mathbb{R}^n$ — изоморфизм,

$P_n: H \ni h \mapsto \langle h, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle h, e_n \rangle e_n \in H_n$ — проектор.

Далее, обозначим $\vec{x}_1^n = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

и $\vec{B}_1(\vec{x}_1^n) = (B_1(x_1, \dots, x_n), \dots, B_n(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^n$.

В этих обозначениях имеем $\Psi_n = I_n P_n$ и $\varphi(x) = \varphi^n(\Psi_n x)$, $g(x) = g^n(\Psi_n x)$, $C(x) = C^n(\Psi_n x)$, $B(x) = \vec{B}_1(\Psi_n x)$.

Определим функцию $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\Phi(\vec{x}_1^n) = \int_H \varphi^n \left(\vec{x}_1^n + \sqrt{2t g^n(\vec{x}_1^n)} \Psi_n(y) \right) e^{\sqrt{\frac{2t}{g^n(\vec{x}_1^n)}} \langle \vec{B}_1(\vec{x}_1^n), \Psi_n(y) \rangle} \mu_A(dy). \quad (3.24)$$

Тогда для каждого $x \in H$ имеем

$$(S_t \varphi)(x) = \Phi(\Psi_n x) \exp \left(t C^n(\Psi_n x) - \frac{\langle A \vec{B}_1(\Psi_n x), \vec{B}_1(\Psi_n x) \rangle}{g^n(\Psi_n x)} t \right). \quad (3.25)$$

В пунктах iii)-v) мы с использованием леммы 3.3.1 докажем, что $S_t \varphi$ имеет ограниченную производную Фреше порядка k для каждого натурального k . Для этого надо доказать, что введённые выше функции $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеют ограниченные производные Фреше порядка k для каждого натурального k .

iii) Стоящее в показателе экспоненты в равенстве (3.25) выражение обладает этим свойством, поскольку оно выражается через функции с этим свойством с помощью конечного числа арифметических действий и композиции. Экспонента — гладкая функция, переводящая ограниченные множества в ограниченные, поэтому и вся экспонента, т.е. второй сомножитель в (3.25), обладает желаемым свойством.

iv) Теперь покажем, что и первый сомножитель в (3.25), т.е. функция Φ , имеет ограниченные производные Фреше всех порядков. Сперва убедимся в существовании этих производных, и начнём с производной первого порядка.

Произведение дифференцируемых функций под знаком интеграла в (3.24) дифференцируемо, поэтому задача свелась к доказательству того, что можно дифференцировать под знаком интеграла, т.е. что вся правая часть (3.25) представляет собой дифференцируемую функцию. Чтобы в этом убедиться, мы применим лемму 3.3.1, которая позволит нам перейти в выражении для Φ от

интеграла по H к интегралу по $\mathbb{R}^n$ (это возможно, поскольку подынтегральная функция цилиндрическая).

Оператор A невырожден и симметричен на H , поэтому оператор $P_n A$ невырожден и симметричен на H_n , и, следовательно, диагонализуется в некотором ортонормированном базисе $b_1, \dots, b_n$. Без ограничения общности мы можем считать, что векторы $e_1, \dots, e_n$ уже образуют такой базис. В самом деле, замена векторов в базисе пространства H_n даст линейную невырожденную замену переменных в функциях $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, использованных для определения цилиндрических функций $H \rightarrow \mathbb{R}$. Это даст нам новые функции $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, но все важные для нас свойства этих функций будут сохранены.

Матрица оператора $P_n A$ в H_n совпадает с матрицей оператора $Q_n = I_n P_n A I_n^{-1}$ в $\mathbb{R}^n$. Далее, пусть набор чисел $q_1, \dots, q_n$ — это полный набор собственных чисел оператора Q_n , отвечающих собственным векторам $\Psi_n e_1, \dots, \Psi_n e_n$. Заметим, что $q_i > 0$ и $g^n(\vec{x}_1^n) \geq g_0 \equiv \text{const} > 0$ для всех $\vec{x}_1^n \in \mathbb{R}^n$. Поэтому в силу (3.2) имеем

$$\Phi(\vec{x}_1^n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n q_i}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^n \left(\vec{x}_1^n + \sqrt{2tg^n(\vec{x}_1^n)} z \right) \times \\ e^{\sqrt{\frac{2t}{g^n(\vec{x}_1^n)}} \langle \vec{B}_1(\vec{x}_1^n), z \rangle} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{2q_i} \right) dz.$$

Теперь введём меру ν на $\mathbb{R}^n$, заданную своей плотностью относительно меры Лебега. Для каждого измеримого множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$\nu(\mathcal{A}) := \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n q_i}} \int_{\mathcal{A}} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{2q_i} \right) dz.$$

Из предыдущих обозначений вытекает, что

$$\Phi(\vec{x}_1^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^n \left(\vec{x}_1^n + \sqrt{2tg^n(\vec{x}_1^n)} z \right) e^{\sqrt{\frac{2t}{g^n(\vec{x}_1^n)}} \langle \vec{B}_1(\vec{x}_1^n), z \rangle} \nu(dz). \quad (3.26)$$

Подынтегральное выражение в (3.26) является композицией отображений с непрерывной производной Фреше, поэтому и само оно обладает непрерывной производной Фреше. Производная Фреше подынтегральной функции равномерно ограничена, оценка получается из т.н. «цепного правила», т.е. теоремы о производной сложной функции. Линейное нормированное пространство $(\mathbb{R}^n, \nu)$ локально компактно, счётно в бесконечности и снабжено неотрицательной мерой Радона ν . Поэтому применима теорема о дифференцировании по Фреше под

знаком интеграла Лебега (теорема 115 в [31]). Итак, функция Φ имеет непрерывную ограниченную производную Фреше.

v) Повторяя проведённое в iv) рассуждение k раз, получаем, что раз подынтегральное выражение имеет всюду на $\mathbb{R}^n$ непрерывные ограниченные производные Фреше порядка k , то и функция Φ имеет всюду на $\mathbb{R}^n$ непрерывные ограниченные производные Фреше порядка k . Поэтому все функции $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в правой части (3.25) имеют непрерывные ограниченные производные Фреше порядка k .

Следовательно, в силу пункта 2 предложения 3.3.1, функция $x \mapsto (S_t\varphi)(x)$ всюду на H имеет для каждого $k \in \mathbb{N}$ непрерывные ограниченные производные Фреше порядка k . Поэтому $S_t\varphi \in D$.

3. i) На данном этапе считаем, что $\varphi \in F$, то есть $\varphi \in C_b(H, \mathbb{R})$ и существует такая последовательность $(\varphi_j) \subset D$, что $\varphi_j(x) \rightarrow \varphi(x)$ равномерно по $x \in H$. Также предполагаем, что $g \in F$, то есть $g \in C_b(H, \mathbb{R})$ и существует такая последовательность $(g_j) \subset D$, что $g_j \rightarrow g$ равномерно. Поскольку $g(x) \geq g_0 \equiv \text{const} > 0$ для всех $x \in H$, то существует такой номер $j_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $j > j_0$ и при всех $x \in H$ справедливо неравенство $g_j(x) \geq \frac{g_0}{2}$. Поэтому мы не ограничим общность, если будем считать, что последовательность (g_j) уже такова, что неравенство $g_j(x) \geq \frac{g_0}{2}$ справедливо для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$.

Также считаем, что $C \in F$, то есть $C \in C_b(H, \mathbb{R})$, и существует такая последовательность $(C_j) \subset D$, что $C_j \rightarrow C$ равномерно. Наконец, мы считаем, что $B \in F_H$, т.е. $B \in C_b(H, H)$ и существует такая последовательность $(B_j) \subset D_H$, что $B_j \rightarrow B$ равномерно. Пусть число $t > 0$, как и ранее, фиксировано.

Обозначим символом $(S_j)_t$ оператор S_t , построенный по функциям g_j, B_j, C_j . В соответствии с (только что доказанным выше) пунктом 2 настоящей теоремы включение $(S_j)_t\varphi_j \in D$ справедливо для всех $j \in \mathbb{N}$.

Далее, в ii) и iii) мы докажем, что $((S_j)_t\varphi_j)(x) \rightarrow (S_t\varphi)(x)$ равномерно по $x \in H$; по определению пространства F это и будет означать, что $S_t\varphi \in F$.

ii) Первым делом докажем, что при каждом фиксированном $y \in H$ последовательность функций $x \mapsto \varphi_j(x + \sqrt{2tg_j(x)}y)$ сходится к функции $x \mapsto \varphi(x + \sqrt{2tg(x)}y)$ равномерно по $x \in H$. В самом деле, пусть дано $\varepsilon > 0$. Найдём такое $j^* \in \mathbb{N}$, что при всех $j > j^*$ справедлива следующая оценка:

$$\sup_{x \in H} \left| \varphi_j \left(x + \sqrt{2tg_j(x)}y \right) - \varphi \left(x + \sqrt{2tg(x)}y \right) \right| \leq \varepsilon. \quad (3.27)$$

Заметим, что функции $\varphi, \varphi_j, g, g_j$ лежат в F по сделанному выше предположению, а все функции в F равномерно непрерывны по предложению 3.3.4. По предположению 3.3.5 семейство функций $\{\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$ равностепенно непрерывно. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что для всех $j \in \mathbb{N}$ из $\|x_1 - x_2\| < \delta$ следует

$$|\varphi_j(x_1) - \varphi_j(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.28)$$

функция $[0, +\infty) \ni a \mapsto \sqrt{2ta} \in \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, поэтому из равномерной (по $x \in H$) сходимости $g_j(x) \rightarrow g(x)$ следует равномерная (по $x \in H$) сходимость $[H \ni x \mapsto \sqrt{2tg_j(x)} \in \mathbb{R}] \rightarrow [H \ni x \mapsto \sqrt{2tg(x)} \in \mathbb{R}]$. А из этого уже вытекает, что для каждого фиксированного $y \in H$ существует такой номер $j_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $j > j_1$ и всех $x \in H$ имеет место неравенство

$$\left\| \left(x + \sqrt{2tg_j(x)y} \right) - \left(x + \sqrt{2tg(x)y} \right) \right\| < \delta. \quad (3.29)$$

Следовательно, поскольку $\varphi_j(z) \rightarrow \varphi(z)$ равномерно по $z \in H$, существует такой номер j_2 , что при всех $j > j_2$ и всех $z \in H$ справедлива оценка

$$|\varphi_j(z) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.30)$$

Для каждого фиксированного $y \in H$, для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$ имеем

$$\left| \varphi_j \left(x + \sqrt{2tg_j(x)y} \right) - \varphi \left(x + \sqrt{2tg(x)y} \right) \right| \leq \left| \varphi_j \left(x + \sqrt{2tg_j(x)y} \right) - \varphi_j \left(x + \sqrt{2tg(x)y} \right) \right| + \left| \varphi_j \left(x + \sqrt{2tg(x)y} \right) - \varphi \left(x + \sqrt{2tg(x)y} \right) \right|$$

Наконец, положим $j^* = \max(j_1, j_2)$. Для всех $j > j^*$ первое слагаемое меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу (3.28) и (3.29); проще всего это увидеть, положив $x_1 = x + \sqrt{2tg_j(x)y}$ и $x_2 = x + \sqrt{2tg(x)y}$. Что касается второго слагаемого, то оно меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу (3.30); проще всего это увидеть, положив $z = x + \sqrt{2tg(x)y}$.

Таким образом, для каждого фиксированного $y \in H$ мы нашли такой номер $j^* \in \mathbb{N}$, что при всех $j > j^*$ и всех $x \in H$ справедливо следующее неравенство:

$$\left| \varphi_j \left(x + \sqrt{2tg_j(x)y} \right) - \varphi \left(x + \sqrt{2tg(x)y} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Беря $\sup_{x \in H}$, получаем желаемую оценку (3.27), поскольку правая часть неравенства не зависит от x .

iii) Рассуждения (опустим их), аналогичные ii), показывают, что для фиксированного y имеет место равномерная по $x \in H$ сходимость $e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t}{g_j(x)}} B_j(x), y \right\rangle} \rightarrow$

$e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}} B(x), y \rangle}$. Объединяя это с результатами пункта ii) и имея в виду, что при фиксированном y все последовательности функций ограничены в совокупности, получаем, что при каждом фиксированном y имеет место

$$\varphi_j \left(x + \sqrt{2tg_j(x)}y \right) e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g_j(x)}} B_j(x), y \rangle} \rightarrow \varphi \left(x + \sqrt{2tg(x)}y \right) e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}} B(x), y \rangle} \quad (3.31)$$

равномерно по $x \in H$.

iv) При фиксированном y функции из (3.31) ограничены, поэтому равенство

$$Y_j = \left[y \mapsto \sup_{x \in H} \left| \varphi_j \left(x + \sqrt{2tg_j(x)}y \right) e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g_j(x)}} B_j(x), y \rangle} - \varphi \left(x + \sqrt{2tg(x)}y \right) e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}} B(x), y \rangle} \right| \right]$$

корректно определяет последовательность функций $Y_j: H \rightarrow \mathbb{R}$.

Из iii) следует, что $Y_j(y)$ сходится к нулю поточечно, т.е. для каждого y . Функции Y_j неотрицательны, ограничены в совокупности интегрируемой (по лемме 3.3.4) функцией $y \mapsto \alpha e^{\beta \|y\|} + \gamma$ при подходящем выборе констант α, β и γ . Применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, заключаем, что $\int_H Y_j(y) \mu_A(dy) \rightarrow 0$. Так как числовая последовательность $\int_H Y_j(y) \mu_A(dy)$ сходится, то она ограничена. Обозначим для краткости

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \varphi \left(x + \sqrt{2tg(x)}y \right) e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}} B(x), y \rangle}, \\ \Psi_j(x, y) &= \varphi_j \left(x + \sqrt{2tg_j(x)}y \right) e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g_j(x)}} B_j(x), y \rangle}, \\ E(x) &= \exp \left(tC(x) - t \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} \right), \\ E_j(x) &= \exp \left(tC_j(x) - t \frac{\langle AB_j(x), B_j(x) \rangle}{g_j(x)} \right). \end{aligned}$$

Рассуждения (опустим их), аналогичные ii), показывают, что $E_j(x) \rightarrow E(x)$ равномерно по $x \in H$. Таким образом, приходим к оценкам

$$\begin{aligned} \|(S_j)_t \varphi_j - S_t \varphi\| &= \sup_{x \in H} \left| E_j(x) \int_H \Psi_j(x, y) \mu_A(dy) - E(x) \int_H \Psi(x, y) \mu_A(dy) \right| \leq \\ &\sup_{x \in H} \left| E_j(x) \int_H \Psi_j(x, y) \mu_A(dy) - E_j(x) \int_H \Psi(x, y) \mu_A(dy) \right| + \end{aligned}$$

$$\sup_{x \in H} \left| E_j(x) \int_H \Psi(x, y) \mu_A(dy) - E(x) \int_H \Psi(x, y) \mu_A(dy) \right| \leq$$

$$\sup_{x \in H} |E_j(x)| \int_H Y_j(y) \mu_A(dy) + \sup_{x \in H} |E_j(x) - E(x)| \int_H \Psi(x, y) \mu_A(dy).$$

Наконец, заметим, что $\sup_{x \in H} |E_j(x) - E(x)| \rightarrow 0$ и $\int_H Y_j(y) \mu_A(dy) \rightarrow 0$, а сомножители этих членов ограничены, откуда вытекает желаемое утверждение о том, что $\|(S_j)_t \varphi_j - S_t \varphi\| \rightarrow 0$.

4. Предположим, что фиксированы $\varphi \in D$, $t > 0$ и $x \in H$. Рассмотрим интеграл

$$\int_H \varphi(x + y) e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy).$$

Будем работать с аппроксимацией функции φ её многочленом Тейлора (3.10) второго порядка с центром в точке x , т.е. будем раскладывать $\varphi(x + y)$ по степеням y . Прежде чем начать рассуждение, сделаем следующее замечание: остаточный член $R(x, y)$ в формуле Тейлора не будет малым, поскольку вектор y пробегает всё пространство H , а вектор x фиксирован, однако интеграл от остаточного члена будет мал, что и является центральным местом в доказательстве.

Поскольку функция φ три раза дифференцируема по Фреше всюду на H , то для каждого $x \in H$ и каждого $y \in H$ существует такое вещественное число $R(x, y)$, что

$$\begin{aligned} & \int_H \varphi(x + y) e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) \\ &= \int_H \left\{ \varphi(x) + \langle \varphi'(x), y \rangle + \frac{1}{2!} \langle \varphi''(x)y, y \rangle + R(x, y) \right\} e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy), \end{aligned}$$

и, в соответствии с (3.11), справедлива оценка

$$|R(x, y)| \leq \frac{\|y\|^3}{(3)!} \sup_{z \in [x, x+y]} \|\varphi^{(3)}(z)\| \leq \frac{1}{3!} \|\varphi'''\| \cdot \|y\|^3, \quad (3.32)$$

где обозначено $\|\varphi'''\| = \sup_{z \in H} \|\varphi^{(3)}(z)\|$. Также введём обозначение $\|g\| = \sup_{z \in H} |g(z)|$.

Сумму можно интегрировать почленно, поскольку каждый член ограничен полиномом от $\|y\|$, умноженным на экспоненту от $\|y\|$, а такие функции интегрируемы в силу леммы 3.3.4. Вычислим интегралы при фиксированных φ ,

$x \in H$, $t > 0$. После этого исследуем их поведение при $t \rightarrow 0$, выделяя интересные нас члены и находя равномерные по $x \in H$ порядки малости остатков.

$$\begin{aligned} \int_H \varphi(x) e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) &= \varphi(x) \int_H e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) = \\ (\text{положим } z = \frac{B(x)}{g(x)} \text{ и } \tilde{A} = 2tg(x)A \text{ в (3.4)}) \\ \varphi(x) \exp \left(\frac{1}{2} \left\langle 2tg(x)A \frac{B(x)}{g(x)}, \frac{B(x)}{g(x)} \right\rangle \right) &= \varphi(x) \exp \left(\frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t \right) = \\ \varphi(x) \left(1 + \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t + o(t) \right) &= \varphi(x) + \varphi(x) \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t + o(t). \end{aligned}$$

Считая, что z и $\tilde{A}$ прежние, положим $w = \varphi'(x)$ в (3.5).

$$\begin{aligned} \int_H \langle \varphi'(x), y \rangle e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) &\stackrel{(3.5)}{=} \\ \left\langle 2tg(x)A\varphi'(x), \frac{1}{g(x)} B(x) \right\rangle \exp \left(\frac{1}{2} \left\langle 2tg(x)A \frac{1}{g(x)} B(x), \frac{1}{g(x)} B(x) \right\rangle \right) &= \\ 2t \langle A\varphi'(x), B(x) \rangle \exp \left(\frac{t}{g(x)} \left\| \sqrt{A} B(x) \right\|^2 \right) &= 2t \langle A\varphi'(x), B(x) \rangle + o(t). \end{aligned}$$

Для члена с φ'' имеем

$$\begin{aligned} \int_H \langle \varphi''(x)y, y \rangle e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) &\stackrel{(3.6)}{=} \\ = \left(2tg(x) \text{tr} A \varphi''(x) + 4t^2 \langle \varphi''(x)AB(x), AB(x) \rangle \right) \exp \left(\frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t \right) &= \\ = 2tg(x) \text{tr} A \varphi''(x) + o(t). \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} &\left| \int_H R(x, y) e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) \right| \\ &\stackrel{(3.7)}{\leq} \int_H \left| R(x, \sqrt{2tg(x)}y) \right| e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), \sqrt{2tg(x)}y \rangle} \mu_A(dy) \\ &\stackrel{(3.32)}{\leq} \int_H \frac{1}{3!} \|\varphi'''\| \left(\sqrt{2tg(x)} \right)^3 \|y\|^3 e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}} B(x), y \rangle} \mu_A(dy) \\ &\leq t^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \|\varphi'''\| \|g\|^{\frac{3}{2}} \int_H \|y\|^3 e^{\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}} B(x), y \rangle} \mu_A(dy) \right) \leq \end{aligned}$$

(в силу неравенства $\langle z, y \rangle \leq \|z\| \|y\|$ и монотонности экспоненты)

$$\leq t^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \|\varphi'''\| \|g\|^{\frac{3}{2}} \int_H \|y\|^3 e^{\|\sqrt{\frac{2t}{g(x)}} B(x)\| \|y\|} \mu_A(dy) \right) \leq$$

(в силу неравенств $\|B(x)\| \leq B_0$, $g_0 \leq g(x)$ и монотонности экспоненты)

$$\leq t^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \|\varphi'''\| \|g\|^{\frac{3}{2}} \int_H \|y\|^3 e^{\sqrt{\frac{2t}{g_0}} B_0 \|y\|} \mu_A(dy) \right) = o(t) \text{ равномерно по } x \in H.$$

Складывая всё, получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_H \varphi(x+y) e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) \\ &= \varphi(x) + t \langle \varphi'(x), AB(x) \rangle + tg(x) \operatorname{tr} A \varphi''(x) - t \varphi(x) \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} + o(t), \end{aligned}$$

равномерно по $x \in H$.

Рассмотрим член $\exp \left(tC(x) - \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t \right)$. Так как $\|C\|, \|A\|, \|B\|$ отделены от бесконечности, а g отделена от нуля, имеем $e^{tC(x) - \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t} = 1 + tC(x) - \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t + o(t)$ равномерно по $x \in H$. Следовательно, равномерно по $x \in H$ при $t \rightarrow 0$ верно

$$\begin{aligned} (S_t \varphi)(x) &= e^{tC(x) - \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t} \int_H \varphi(x+y) e^{\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) = \\ &= \varphi(x) + t \langle \varphi'(x), AB(x) \rangle + tg(x) \operatorname{tr} A \varphi''(x) + tC(x) \varphi(x) + o(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что равномерно по $x \in H$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(S_t \varphi)(x) - \varphi(x)}{t} = g(x) \operatorname{tr} A \varphi''(x) + \langle \varphi'(x), AB(x) \rangle + C(x) \varphi(x) = (L\varphi)(x).$$

5. i) Сперва рассмотрим случай $t_0 \neq 0$. Если $t_n \rightarrow t_0$, то $2t_n g(x) \rightarrow 2t_0 g(x)$ равномерно по $x \in H$. Так как функция $z \mapsto \sqrt{z}$ равномерно непрерывна, то $\sqrt{2t_n g(x)} \rightarrow \sqrt{2t_0 g(x)}$ равномерно по $x \in H$.

Функция φ равномерно непрерывна по предложению 3.3.4, поэтому для каждого фиксированного $y \in H$ верно, что $\varphi(x + \sqrt{2t_n g(x)} y) \rightarrow \varphi(x + \sqrt{2t_0 g(x)} y)$ равномерно по $x \in H$.

Далее, для каждого $y \in H$ последовательность $\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_n g(x)}y \right\rangle$ сходится к $\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_0 g(x)}y \right\rangle$ равномерно по $x \in H$ в силу линейности скалярного произведения. Так как числовая последовательность t_n сходится, то она ограничена; кроме того, $g(x) \geq g_0 \equiv \text{const} > 0$, а функции $x \mapsto g(x)$ и $x \mapsto \|B(x)\|$ ограничены. Следовательно, существует такая константа $K > 0$, что для фиксированного $y \in H$ для всех $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ и всех $x \in H$ справедливо неравенство $\left| \left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_k g(x)}y \right\rangle \right| \leq K$. Функция $z \mapsto e^z$ равномерно непрерывна по $z \in [-K, K]$, поэтому для каждого $y \in H$ имеет место равномерная по $x \in H$ сходимость $e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_n g(x)}y \right\rangle} \rightarrow e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_0 g(x)}y \right\rangle}$.

Почленное произведение двух ограниченных в совокупности, равномерно сходящихся последовательностей является последовательностью, равномерно сходящейся к произведению пределов двух исходных последовательностей. Следовательно, из двух предыдущих абзацев вытекает, что для каждого $y \in H$

$$\varphi(x + \sqrt{2t_n g(x)}y) e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_n g(x)}y \right\rangle} \rightarrow \varphi(x + \sqrt{2t_0 g(x)}y) e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_0 g(x)}y \right\rangle} \quad (3.33)$$

равномерно по $x \in H$.

Поскольку для фиксированного y функции из (3.33) ограничены, корректно определена последовательность числовых функций

$$Y_n(y) = \sup_{x \in H} \left| \varphi \left(x + \sqrt{2t_n g(x)}y \right) e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t_n}{g(x)}}B(x), y \right\rangle} - \varphi \left(x + \sqrt{2t_0 g(x)}y \right) e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t_0}{g(x)}}B(x), y \right\rangle} \right|.$$

Из доказанного выше следует, что $Y_n(y)$ сходится к нулю поточечно, т.е. для каждого y . Функции Y_n ограничены интегрируемой функцией (см. лемму 3.3.4), и теорема Лебега о мажорируемой сходимости позволяет утверждать, что $\int_H Y_n(y) \mu_A = 0$.

Наконец, $C \in F, B \in F_H$, поэтому $\sup_{x \in H} |C(x)| < \infty$, $\sup_{x \in H} \|B(x)\| < \infty$. Объединяя это с $g(x) \geq g_0$, приходим к тому, что $e^{t_n C(x) - \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t_n} \rightarrow e^{t_0 C(x) - \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t_0}$ равномерно по $x \in H$.

Итак, $S_{t_n} \varphi(x)$ — это произведение двух ограниченных в совокупности, равномерно сходящихся последовательностей, и, значит, сходится к $S_{t_0} \varphi(x)$.

ii) Теперь рассмотрим случай $t_0 = 0$. Вспомним, что по определению $S_0 = I$, поэтому нам нужно для каждой фиксированной φ доказать, что из $t_n \rightarrow 0$ следует $S_{t_n} \varphi \rightarrow \varphi$, т.е. $\|S_{t_n} \varphi - \varphi\| \rightarrow 0$. Мы не ограничим общность, полагая для удобства рассуждения, что $0 < t_n \leq 1$.

iiа) Рассмотрим сперва случай $\varphi \in D$. Тогда по пункту 4 настоящей теоремы $S_t\varphi = \varphi + tL\varphi + o(t)$, поэтому из $t_n \rightarrow 0$ следует $S_{t_n}\varphi \rightarrow \varphi$.

iiб) Пусть теперь $\varphi \in F$, и поэтому существует такая последовательность $(\varphi_k) \subset D$, что $\|\varphi_k - \varphi\| \rightarrow 0$. Пункт 1 настоящей теоремы позволяет верить в то, что существуют такая константа $\omega \geq 1$, что для всех $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство $\|S_t\| \leq \omega$. Теперь для каждого $\varepsilon > 0$ применим « $\varepsilon/3$ -приём», основанный на оценке

$$\|S_{t_n}\varphi - \varphi\| \leq \|S_{t_n}\varphi - S_{t_n}\varphi_k\| + \|S_{t_n}\varphi_k - \varphi_k\| + \|\varphi_k - \varphi\|.$$

Мы можем выбрать k так, что $\|\varphi_k - \varphi\| < \varepsilon/(3\omega)$. При фиксированном k мы благодаря iiа) выберем такое n_0 , что при всех $n > n_0$ будет $\|S_{t_n}\varphi_k - \varphi_k\| < \varepsilon/3$. Поэтому при $n > n_0$ справедлива оценка

$$\|S_{t_n}\varphi - \varphi\| \leq \|S_{t_n}\| \cdot \|\varphi - \varphi_k\| + \|S_{t_n}\varphi_k - \varphi_k\| + \|\varphi_k - \varphi\| < \omega \frac{\varepsilon}{3\omega} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3\omega} \leq \varepsilon,$$

завершающая доказательство. □

Теорема 3.4.2. (*о свойствах оператора L*) Предположим, что для каждого $x \in H$ справедливы неравенства $g(x) \geq g_o \equiv \text{const} > 0$ и $C(x) \leq 0$. Поскольку $C \in F$, то существует последовательность $(C_j) \subset D$, сходящаяся к C равномерно; потребуем дополнительно, что эта последовательность может быть выбрана так, что $C_j(x) \leq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$. Оператор $L: D \rightarrow F$ определим равенством

$$(L\varphi)(x) = g(x)\text{tr}A\varphi''(x) + \langle \varphi'(x), AB(x) \rangle + C(x)\varphi(x).$$

Символом I обозначим тождественный оператор.

Тогда:

1. Если $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$ и $\varphi \in D$, то $L\varphi \in D$. Если $g \in F$, $C \in F$, $B \in F_H$ и $\varphi \in D$, то $L\varphi \in F$.

2. Если $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$, то для каждого $\lambda > 0$ оператор $\lambda I - L$ сюръективен на D , и, следовательно, линейное пространство $(\lambda I - L)(D) = D$ плотно в F .

3. Если $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$, то оператор (L, D) диссипативен и допускает замыкание.

4. Если $g \in F$, $C \in F$, $B = 0$, то для каждого $\lambda > 0$ линейное пространство $(\lambda I - L)(D)$ плотно в F .

5. Если $g \in F$, $C \in F$, $B \in F_H$, то оператор (L, D) диссипативен и имеет замыкание $(\bar{L}, D_1)$, которое также является диссипативным оператором.

Доказательство.

1. i) Первая часть утверждения следует из того, что результат применения дифференциального оператора с гладкими цилиндрическими коэффициентами к гладкой цилиндрической функции это гладкая цилиндрическая функция. Как следует из цепного правила, все производные ограничены.

ii) Пусть коэффициенты оператора L — это равномерные пределы g, B, C цилиндрических функций g_j, B_j, C_j . Обозначим символом L_j оператор L , построенный по функциям g_j, B_j, C_j . При $j \rightarrow \infty$ последовательность $L_j \varphi$ сходится равномерно к $L\varphi$, поэтому $L\varphi \in F$, так как $L_j \varphi \in D$ согласно i).

2. Пусть $g \in D$, $B \in D_H$, $C \in D$. Напомним, что эти три функции цилиндрические, поэтому они тесно связаны с функциями на $\mathbb{R}^n$; это и есть центральная идея доказательства.

Фиксируем $\lambda > 0$, возьмём произвольную функцию $\varphi \in D$ и покажем, что существует функция $f \in D$, удовлетворяющая уравнению

$$\lambda f(x) - g(x)\text{tr} A f''(x) - \langle f'(x), AB(x) \rangle - C(x)f(x) = \varphi(x). \quad (3.34)$$

Пусть векторы $e_1, \dots, e_n$ таковы, что для каждого $x \in H$ имеют место равенства

$$C(x) = C^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle), B(x) = \sum_{k=1}^n B_k^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) e_k, \quad (3.35)$$

$$\varphi(x) = \varphi^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \text{ and } g(x) = g^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle), \quad (3.36)$$

где функции $\varphi^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $C^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $B_k^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, дифференцируемы и ограничены вместе со своими производными всех порядков. Попробуем поискать решение уравнения (3.34) в виде

$$f(x) = f^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle), \quad (3.37)$$

где функция $f^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, дифференцируема и ограничена вместе со своими производными всех порядков.

Согласно пункту 1 предложения 3.3.1

$$f'(x) = \sum_{s=1}^n \partial_s f^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) e_s.$$

Используя (3.35), получаем

$$\begin{aligned} \langle f'(x), AB(x) \rangle &= \left\langle \sum_{s=1}^n \partial_s f^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) e_s, A \sum_{k=1}^n B_k^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) e_k \right\rangle = \\ &= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^n B_k^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \langle Ae_s, e_k \rangle \right) \partial_s f^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle). \end{aligned} \quad (3.38)$$

На основе (3.9), (3.36), (3.35), (3.37) и (3.38) приходим к тому, что уравнение (3.34) относительно неизвестной функции f вида (3.37) эквивалентно следующему уравнению относительно неизвестной функции f^n :

$$\begin{aligned} &g^n(x_1, \dots, x_n) \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \langle Ae_s, e_k \rangle \partial_k \partial_s f^n(x_1, \dots, x_n) \\ &+ \left(\sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^n B_k^n(x_1, \dots, x_n) \langle Ae_s, e_k \rangle \right) \partial_s f^n(x_1, \dots, x_n) \right) \\ &+ C^n(x_1, \dots, x_n) f^n(x_1, \dots, x_n) - \lambda f^n(x_1, \dots, x_n) = -\varphi^n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (3.39)$$

где обозначено $x_j = \langle x, e_j \rangle$.

Уравнение (3.39) представляет собой конечномерное дифференциальное уравнение с частными производными. Заметим, что $g^n(x_1, \dots, x_n) \geq g_0 \equiv \text{const} > 0$. Квадратичная форма, заданная $n \times n$ -матрицей $(\langle Ae_s, e_k \rangle)$ положительно определена, поскольку оператор A положительный и невырожденный. Поэтому дифференциальный оператор в уравнении (3.39) эллиптический, и (3.39) имеет вид (3.12), то есть

$$L^n f^n(x_1, \dots, x_n) - \lambda f^n(x_1, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Функция φ^n , а также функции g^n , C^n и B_k^n , использованные для построения коэффициентов оператора L^n , ограничены вместе со всеми своими производными. (Напомним, что L^n это не n -я степень оператора L .) Следовательно, мы можем применить пункт 1 леммы 3.3.5 к уравнению (3.39), получая, что (3.39) имеет решение f^n , непрерывное и ограниченное, как и все его производные.

Функция f , определённая равенством (3.37) принадлежит D по пункту 2 предложения 3.3.1.

Значит, для каждого $\lambda > 0$ оператор $\lambda I - L$ сюръективен на D , потому что прообраз функции $\varphi \in D$ содержит, по крайней мере, функцию $f(x) = f^n(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$, где функция $f^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является решением (существование мы только что доказали) уравнения (3.39).

3. Пусть снова $g \in D, C \in D, B \in D_H$. Докажем, что оператор L диссипативен. Пусть функция $f \in D$ и число $\lambda > 0$ фиксированы.

Как и в доказательстве пункта 2 настоящей теоремы, мы будем пользоваться тем, что значение функции Lf в точке $x \in H$ равно значению функции $L^n f^n$ в точке $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \in \mathbb{R}^n$. Снова оператор A положителен и невырожден, а функция g удовлетворяет неравенству $g(x) \geq g_0 \equiv \text{const} > 0$, поэтому мы можем применить пункт 2 леммы 3.3.5 к конечномерному оператору. Так мы убеждаемся, что конечномерный оператор диссипативен, а вместе с ним диссипативен и оператор L . Эту идею можно выразить более формально следующим образом:

$$\begin{aligned} \|Lf - \lambda f\| &= \sup_{x \in H} |g(x) \text{tr}(Af''(x)) + \langle f'(x), AB(x) \rangle + C(x)f(x) - \lambda f(x)| = \\ &= \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \left| g^n(x_1, \dots, x_n) \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \langle Ae_s, e_k \rangle \partial_k \partial_s f^n(x_1, \dots, x_n) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^n B_k^n(x_1, \dots, x_n) \langle Ae_s, e_k \rangle \right) \partial_s f^n(x_1, \dots, x_n) + \right. \\ &\quad \left. C^n(x_1, \dots, x_n) f^n(x_1, \dots, x_n) - \lambda f^n(x_1, \dots, x_n) \right| \stackrel{(3.13)}{\geq} \\ &= \lambda \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} |f^n(x_1, \dots, x_n)| = \lambda \sup_{x \in H} |f(x)| = \lambda \|f\|, \end{aligned}$$

где $x_j = \langle x, e_j \rangle$. Неравенство

$$\|Lf - \lambda f\| \geq \lambda \|f\| \quad (3.40)$$

означает, что оператор L диссипативен.

Наконец, в соответствии с предложением 1.1.2, замыкаемость оператора L следует из того, что L диссипативен и имеет плотную область определения.

4. i) Пусть $g \in F$ и $C \in F$, т.е. существуют такие последовательности $(g_j) \subset D$ и $(C_j) \subset D$, что $\|g - g_j\| \rightarrow 0$ и $\|C - C_j\| \rightarrow 0$. Пусть $B(x) = 0$ при всех $x \in H$. Образы операторов $(\lambda I - L)$ и $(L - \lambda I)$ совпадают. Так как D плотно в F , то достаточно показать, что образ оператора $(L - \lambda I)$ плотен в D , тогда он будет плотен и в F . Пусть число $\lambda > 0$ и функция $\psi \in D$ фиксированы. Будем аппроксимировать ψ значениями оператора $(L - \lambda I)$.

Так как $g_j \rightarrow g$ и, для каждого $x \in H$, справедлива оценка $g(x) \geq g_0$, то существует такой номер j'_0 , что при всех $x \in H$ и всех $j > j'_0$ верно

$$g_j(x) \geq \frac{g_0}{2}. \quad (3.41)$$

Обозначим символом L_j оператор L , построенный по функциям g_j и C_j . Заметим, что $C_j(x) \leq 0$ и $g_j(x) \geq \frac{g_0}{2}$, поэтому мы можем применить пункт 2 настоящей теоремы к оператору L_j . Согласно пункту 2, образ оператора $(L_j - \lambda I)$ равен D , то есть для каждого $j > j'_0$ существует такая функция $f_j \in D$, что

$$L_j f_j - \lambda f_j = \psi. \quad (3.42)$$

Цель дальнейших рассуждений — показать, что $L f_j - \lambda f_j \rightarrow \psi$ при $j \rightarrow \infty$. Из этого будет следовать, что образ оператора $(\lambda I - L)$ плотен в D .

ii) Подготовим несколько оценок. Во-первых, поскольку $C_j \rightarrow C$, существует такой номер j_0 , что при всех $j > j_0$ верно

$$\|C_j\| \leq 2\|C\|. \quad (3.43)$$

Во-вторых, из (3.42) и (3.40) вытекает, что при всех $j > j'_0$ верно

$$\lambda \|f_j\| \stackrel{(3.40)}{\leq} \|L_j f_j - \lambda f_j\| \stackrel{(3.42)}{=} \|\psi\|,$$

т.е. при всех $j > j'_0$

$$\|f_j\| \leq \frac{\|\psi\|}{\lambda}. \quad (3.44)$$

Наконец, выражая член $\text{tr}(A f_j'')$ из равенства

$$\psi = L_j f_j - \lambda f_j = g_j \text{tr}(A f_j'') + (C_j - \lambda) f_j,$$

приходим к тому, что при всех $j > \max(j_0, j'_0)$ имеет место

$$\|\text{tr}(A f_j'')\| = \left\| \frac{\psi + (\lambda - C_j) f_j}{g_j} \right\| \stackrel{(3.44), (3.43), (3.41)}{\leq} \frac{\|\psi\| + (\lambda + 2\|C\|)\|\psi\|/\lambda}{g_0/2}. \quad (3.45)$$

iii) Теперь докажем, что из $j \rightarrow \infty$ вытекает $Lf_j - \lambda f_j \rightarrow \psi$. В самом деле, при всех $j > \max(j_0, j'_0)$ справедливо

$$\begin{aligned} \|Lf_j - \lambda f_j - \psi\| &\stackrel{(3.42)}{=} \|Lf_j - \lambda f_j - (L_j f_j - \lambda f_j)\| = \|(g - g_j)\text{tr}(Af_j'') + (C - C_j)f_j\| \\ &\stackrel{(3.45), (3.44)}{\leq} \|(g - g_j)\| \frac{\|\psi\| + (\lambda + 2\|C\|)\|\psi\|/\lambda}{g_0/2} + \|(C - C_j)\| \frac{\|\psi\|}{\lambda} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

поскольку $\|(g - g_j)\| \rightarrow 0$ и $\|(C - C_j)\| \rightarrow 0$. Пункт 4 доказан.

5. Пусть коэффициенты оператора L это функции g, B, C , являющиеся равномерными пределами гладких ограниченных цилиндрических функций g_j, B_j, C_j . Так как $g_j \rightarrow g$, и при всех $x \in H$ верно $g(x) \geq g_0$, то существует такой номер j_0 , что при всех $x \in H$ и всех $j > j_0$ справедливо неравенство $g_j(x) \geq \frac{g_0}{2}$. Также припомним, что $C_j(x) \leq 0$. Всё это позволяет использовать пункт 3 настоящей теоремы.

Согласно (3.40), для каждой функции $\varphi \in D$ и каждого $\lambda > 0$ верно

$$\|g_j \text{tr}(A\varphi'') + \langle \varphi', AB_j \rangle + C_j \varphi - \lambda \varphi\| \geq \lambda \|\varphi\|.$$

Переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, получаем оценку $\|L\varphi - \lambda \varphi\| \geq \lambda \|\varphi\|$, которая и означает, что оператор L диссипативен. Согласно предложению 1.1.2, диссипативный оператор (L, D) с областью определения D , плотной в F , обладает замыканием. Обозначим это замыкание символом $(\bar{L}, D_1)$. Заметим, что по предложению 1.1.2 оператор $(\bar{L}, D_1)$ также диссипативен.

□

Из последних двух теорем вытекает следующий результат:

Теорема 3.4.3. (о связи между семейством $(S_t)_{t \geq 0}$ и полугруппой с генератором $\bar{L}$)

Пусть $g \in F$, $B \in F_H$, $C \in F$, и для каждого $x \in H$ выполнено $g(x) \geq g_0 \equiv \text{const} > 0$ и $C(x) \leq 0$. Так как $C \in F$, то существует последовательность $(C_j) \subset D$, сходящаяся к C равномерно; потребуем дополнительно, что её можно выбрать так, что $C_j(x) \leq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$. Тогда справедливо следующее:

1. Если замыкание $(\bar{L}, D_1)$ оператора (L, D) является генератором C_0 -полугруппы $(e^{t\bar{L}})_{t \geq 0}$ в F , то

$$e^{t\bar{L}}\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{\frac{t}{n}}\right)^n \varphi, \quad (3.46)$$

где предел существует для каждой $\varphi \in F$ равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

2. Если $B = 0$, то оператор $(\bar{L}, D_1)$ в самом деле является генератором C_0 -полугруппы $(e^{t\bar{L}})_{t \geq 0}$ в F . Более того, для каждого $t \geq 0$ справедливо неравенство $\|e^{\bar{L}t}\| \leq 1$, т.е. полугруппа $(e^{\bar{L}t})_{t \geq 0}$ сжимающая.

3. Пусть $B = 0$, и для каждого $j \in \mathbb{N}$ даны функции $g_j \in F$, $B_j \in F_H$, $C_j \in F$, причём $B_j = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, и каждая из функций C_j является равномерным пределом неотрицательных функций, лежащих в D . Пусть существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$ верно $g_j(x) \geq \varepsilon_0$ и $C_j(x) \leq 0$. Символом L_j обозначим оператор L , построенный по функциям g_j , B_j и C_j ; оператор L , построенный по функциям g , B и C обозначим символом L_0 . Пусть также имеют место равномерные по $x \in H$ сходимости $g_j(x) \rightarrow g(x)$ и $C_j(x) \rightarrow C(x)$.

Тогда (существующие по пункту 2) C_0 -полугруппы $(e^{\bar{L}_j t})_{t \geq 0}$ сходятся сильно (и равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$) к (существующей по пункту 2) C_0 -полугруппе $(e^{\bar{L}_0 t})_{t \geq 0}$ с генератором $\bar{L}_0$. Иными словами, для каждого $t_0 > 0$ и каждой $\varphi \in F$ существует предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (e^{\bar{L}_j t} \varphi)(x) = (e^{\bar{L}_0 t} \varphi)(x), \quad (3.47)$$

равномерный по $x \in H$ и $t \in [0, t_0]$.

Доказательство.

1. В теореме 1.4.1 положим $G(t) = S_t$, $\omega = \frac{2\|A\|\|B\|^2}{g_0} + \|C\|$, $\mathcal{F} = F$, $\mathcal{D} = D$, $G'(0) = L$, $C = \bar{L}$. Из пунктов 1, 4 и 5 теоремы 3.4.1 и пункта 5 теоремы 3.4.2 следует, что все условия теоремы 1.4.1 выполнены.

2. Заметим, что $C(x) \leq 0$, поэтому $\sup_{x \in H} e^{C(x)} \leq 1$, и для $B = 0$ верно $\|S_t\| \leq 1$. Условия теоремы 1.4.2 будут выполнены, если положить $\mathcal{F} = F$, $\mathcal{D} = D$, $\mathcal{L} = L$, $V_t = S_t$, $M = 1$, $\omega = 0$. В самом деле, по пункту 1 теоремы 3.4.1 для всех $t \geq 0$ справедлива оценка $\|S_t\| \leq e^{\omega t} = 1$, поэтому $\|(S_t)^k\| \leq 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$. Остальные условия теоремы 1.4.2 вытекают из пункта 4 теоремы 3.4.1 и пунктов 4 и 5 теоремы 3.4.2. Заметим, что, так как диссипативность оператора $\bar{L}$ уже доказана, то можно было бы вместо теоремы 1.4.2 применить теорему 1.1.1.

3. В теореме 1.3.1 положим $\mathcal{F} = F$, $\mathcal{D} = D$, $\mathcal{L} = L_0$, $\mathcal{L}_n = L_j$. Видно, что пункт 2 настоящей теоремы и пункты 4 и 5 теоремы 3.4.2 влекут за собой все

условия теоремы 1.3.1, кроме одного следующего: если $\varphi \in D$, то $\lim_{j \rightarrow \infty} L_j \varphi = L_0 \varphi$. Однако, простая непосредственная проверка показывает, что и оно верно.

□

3.4.2 Решение задачи Коши для параболического уравнения представляется в виде формулы Фейнмана

Ставится задача о нахождении функции $u: [0, +\infty) \times H \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей следующим условиям (будем называть их задачей Коши для параболического дифференциального уравнения с частными производными):

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = Lu(x, t); & t \geq 0, x \in H, \\ u(0, x) = u_0(x); & x \in H. \end{cases} \quad (3.48)$$

Этой задаче Коши сопоставим следующую так называемую абстрактную задачу Коши (см. определение 1.2.1), которая состоит из следующих условий на функцию $U: [0, +\infty) \rightarrow F$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \bar{L}U(t); & t \geq 0, \\ U(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.49)$$

Замечание 3.4.1. Задача (3.48) может быть рассмотрена как задача (3.49) в следующем смысле. Функцию $u: (t, x) \mapsto u(t, x)$ двух переменных t и x можно рассматривать как функцию $u: t \mapsto [x \mapsto u(t, x)]$ одного переменного t , принимающую значения в множестве функций переменного x . Тогда

$$u(t, x) = (U(t))(x), \quad t \geq 0, x \in H.$$

Используя это соответствие, определим решение задачи (3.48), отправляясь от определения 1.2.1.

Определение 3.4.1. Будем называть функцию $u: [0, +\infty) \times H \rightarrow \mathbb{R}$ *сильным решением (strong solution)* задачи (3.48), если она удовлетворяет следующим

условиям:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(t, \cdot) \in D_1; & t \geq 0, \\ \text{функция } t \mapsto u(t, \cdot) \text{ непрерывна;} & t \geq 0, \\ \text{Равномерно по } x \in H \exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t+\varepsilon, x) - u(t, x)}{\varepsilon} = u'_t(t, x); & t \geq 0, \\ u'_t(t, \cdot) \in F; & t \geq 0, \\ \text{Функция } t \mapsto u'_t(t, \cdot) \text{ непрерывна;} & t \geq 0, \\ u'_t(t, x) = Lu(x, t); & t \geq 0, x \in H, \\ u(0, x) = u_0(x); & x \in H. \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Определение 3.4.2. Будем называть функцию $u: [0, +\infty) \times H \rightarrow \mathbb{R}$ *mild-решением* задачи (3.48) если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(t, \cdot) \in F; & t \geq 0, \\ \text{Function } t \mapsto u(t, \cdot) \text{ is continuous;} & t \geq 0, \\ \int_0^t u(s, \cdot) ds \in D_1; & t \geq 0, \\ u(t, x) = L \int_0^t u(s, x) ds + u_0(x); & t \geq 0, x \in H, \\ u_0 \in F. \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Определение 3.4.3. Будем использовать символ $C([0, +\infty), F)$ для обозначения класса всех тех функций $u: [0, +\infty) \times H \rightarrow \mathbb{R}$, что для каждого $t \geq 0$ функция $x \mapsto u(t, x)$ принадлежит классу F , а отображение $t \mapsto u(t, \cdot) \in F$ непрерывно для каждого $t \geq 0$.

Наконец, сформулируем и докажем основной результат настоящей главы. Мы следуем обозначениям и определениям раздела 3.2.

Теорема 3.4.4. (о решении задачи Коши для параболического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве)

Пусть $g \in F, C \in F, B \in F_H$. Пусть существует такое число $g_0 > 0$, что для всех $x \in H$ выполнено $g(x) \geq g_0$ и $C(x) \leq 0$. Поскольку $C \in F$, существует последовательность $(C_j) \subset D$, сходящаяся к C равномерно; потребуем дополнительно, что она может быть выбрана так, что $C_j(x) \leq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$.

Тогда справедливо следующее:

1. Если существует C_0 -полугруппа с генератором $\bar{L}$, то для каждой функции $u_0 \in D_1$ существует решение u задачи (3.50), единственное в классе $C([0, +\infty), F)$.

Это решение непрерывно зависит от u_0 и задаётся формулой

$$u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(S_{\frac{t}{n}} \right)^n u_0 \right) (x),$$

где предел существует равномерно по $x \in H$ и равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

2. Если существует C_0 -полугруппа с генератором $\bar{L}$, то для каждой функции $u_0 \in F$ существует решение u задачи (3.51), единственное в классе $C([0, +\infty), F)$. Это решение непрерывно зависит от u_0 и задаётся формулой

$$u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(S_{\frac{t}{n}} \right)^n u_0 \right) (x),$$

где предел существует равномерно по $x \in H$ и равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

3. Если $B = 0$, то C_0 -полугруппа с генератором $\bar{L}$ существует. Формула $u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(S_{\frac{t}{n}} \right)^n u_0 \right) (x)$ в случае $B = 0$ приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_H \int_H \dots \int_H \int_H}_n e^{\frac{t}{n}(C(x) + \sum_{k=1}^{n-1} C(y_k))} u_0(y_1) \mu_{\frac{2t}{n}g(y_2)A}^{y_2}(dy_1) \mu_{\frac{2t}{n}g(y_3)A}^{y_3}(dy_2) \dots \\ & \dots \mu_{\frac{2t}{n}g(y_n)A}^{y_n}(dy_{n-1}) \mu_{\frac{2t}{n}g(x)A}^x(dy_n). \quad (3.52) \end{aligned}$$

В этом случае функция u при всех $t > 0$ удовлетворяет оценке $\sup_{x \in H} |u(t, x)| \leq \sup_{x \in H} |u_0(x)|$.

4. Пусть $B = 0$, а $g_j \in F$, $B_j \in F_H$ и $C_j \in F$ заданы для всех $j \in \mathbb{N}$. Пусть $B_j = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Пусть существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что $g_j(x) \geq \varepsilon_0$ и $C_j(x) \leq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$, причём каждая из функций C_j является равномерным пределом неотрицательных функций, лежащих в D . Используем символ L_j для обозначения оператора L , построенного по функциям g_j , B_j и C_j . Символ L_0 используем для обозначения оператора L , построенного по функциям g , B и C .

Предположим, что имеют место равномерные по $x \in H$ сходимости $g_j(x) \rightarrow g(x)$ и $C_j(x) \rightarrow C(x)$. Обозначим символом u_j решение задач (3.50) и (3.51) для оператора L_j . Для решений задач (3.50) и (3.51) с оператором L_0 используем символ u .

Тогда $u_j(t, x)$ сходится к $u(t, x)$ при $j \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in H$ и равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

Замечание 3.4.2. Подчеркнём, что в случае $B = 0$ решение непрерывно зависит от всех данных задачи Коши: от коэффициентов уравнения (пункт 4) и начального условия (пункты 1 и 2).

Замечание 3.4.3. Аналогичные теоремы для $\mathbb{C}$ - и $\mathbb{R}^n$ -значных функций u формулируются *mutatis mutandis* и будут верны в силу только что сформулированной теоремы 3.4.4 и линейности L и S_t . Единственным дополнительным условием будет то, что коэффициенты уравнения должны остаться вещественнозначными.

Замечание 3.4.4. Замечание 3.4.3 применимо ко всем ключевым теоремам настоящей главы.

Доказательство теоремы 3.4.4.

1. Пусть существует C_0 -полугруппа с генератором $\bar{L}$. Тогда по пункту 1 предложения 1.2.2 получаем существование сильного решения (определение 1.2.1) абстрактной задачи Коши (3.49), единственное в классе $C([0, +\infty), F)$. По пункту 1 теоремы 3.4.3 полугруппа может быть представлена в том виде, который утверждает настоящая теорема. Используя описанное в замечании 3.4.1 соответствие между задачами (3.48) и (3.49), получаем решение задачи (3.50). Решение единственно в классе $C([0, +\infty), F)$, как следует из замечания 3.4.1.

2. Доказательство аналогично доказательству пункта 1. Единственное отличие состоит в том, что в теореме 1.2.2 нужно ссылаться на пункт 2, а не на пункт 1.

3. Существование рассматриваемой полугруппы следует из пункта 2 теоремы 3.4.3. Оценка на супремум модуля решения следует из того, что полугруппа сжимающая; кроме того, она легко получается и сразу из доказанной интегральной формулы для решения, поскольку интегрирование производится по вероятностной мере.

Поясним, как из равенства $u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(S_{\frac{t}{n}} \right)^n u_0 \right) (x)$ возникает формула (3.52). Для непрерывной ограниченной функции $\psi: H \rightarrow \mathbb{R}$ и точки $x \in H$ справедливо следующее правило замены переменной интегрирования:

$$\int_H \psi(y) \mu_A(dy) = \int_H \psi(y - x) \mu_A^x(dy).$$

Следуя ему и заменяя A на $2tg(x)A$, приходим к равенству

$$(S_t \varphi)(x) = e^{tC(x)} \int_H \varphi(x + y) \mu_{2tg(x)A}(dy)$$

$$= e^{tC(x)} \int_H \varphi(x + (y - x)) \mu_{2tg(x)A}^x(dy) = e^{tC(x)} \int_H \varphi(y) \mu_{2tg(x)A}^x(dy).$$

Для $n = 2$ в формуле (3.52) под знаком предела получаем выражение

$$\begin{aligned} \left(\left(S_{\frac{t}{2}} \right)^2 \varphi \right) (x) &= \left(S_{\frac{t}{2}} \left(S_{\frac{t}{2}} \varphi \right) \right) (x) \\ &= \int_H \left(\int_H e^{\frac{t}{2}(C(x)+C(y_1))} \varphi(y_1) \mu_{\frac{2t}{2}g(y_2)A}^{y_2}(dy_1) \right) \mu_{\frac{2t}{2}g(x)A}^x(dy_2). \end{aligned}$$

По той же схеме получаются и выражения в случае $n > 2$. Таким образом, формула (3.52) доказана.

4. Желаемое прямо следует из пункта 3 теоремы 3.4.3.

□

Заключение

Обзор проведенного исследования. Тематика диссертации относится к области бесконечномерного анализа и его приложений к математической физике. В диссертации рассмотрены задачи теории операторных полугрупп и теории параболических дифференциальных уравнений. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Введено понятие функции, касательной по Чернову к оператору, и найдены методы построения таких функций.

2. Для параболического уравнения на вещественной прямой с переменными коэффициентами построены основанные на операторах сдвига черновские аппроксимации к решению задачи Коши, доказана равномерная сходимость аппроксимаций к решению. Доказано, что решение может быть записано также как формула Фейнмана с интегральным ядром, содержащим обобщённые функции.

3. Для параболического уравнения с переменными коэффициентами с пространственной координатой из бесконечномерного гильбертова пространства доказано существование разрешающей полугруппы, найдена дающая решение задачи Коши формула Фейнмана, доказана непрерывная зависимость решения от коэффициентов уравнения.

Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы.

По главе 1. Для каждого дифференциального оператора конечного порядка с переменными коэффициентами построить семейство операторов, касательное к нему по Чернову. Рассмотреть разные конструкции таких семейств для различных областей определения и классов гладкости коэффициентов оператора.

По главе 2. Исследовать возникающие конструкции кратных интегралов с дельта-функциями под знаком интеграла; в частности, рассмотреть возможность перехода от повторного интеграла к кратному, а также вопрос о сходимости аппроксимационной формулы в пространстве обобщённых функций.

По главе 3. Развить изложенные в главе 3 методы таким образом, чтобы они были применимы к эволюционному уравнению с бесконечномерным пространством координат при том, что дифференциальный оператор в правой части имеет порядок выше второго.

Литература

- [1] Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры. // Тр. ММО. – 1971. – Т. 24. – С. 133–174.
- [2] Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II. Дифференциальные операторы и их преобразования Фурье. // Тр. ММО. – 1972. – Т. 27. – С. 249–262.
- [3] Аккарди Л., Смолянов О.Г. Обобщённые лапласианы Леви и чезаровские средние // ДАН. – 2009. Т. 424:5. – С. 583-567.
- [4] Богачев В.И. Гауссовские меры. М.: Физматлит, 1997. 343 с.
- [5] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Ижевск: РХД, 2011. – 728 с.
- [6] Богачев В.И., Смолянов О.Г., Соболев В.И. Топологические векторные пространства и их приложения. Ижевск: РХД, 2012. – 584 с.
- [7] Бузинов М.С., Бутко Я.А. Формулы Фейнмана для параболического уравнения с бигармоническим дифференциальным оператором на конфигурационном пространстве // Наука и образование. – 2012. Т. 8. – 20 с.
- [8] Бутко Я.А. Формула Фейнмана для полугрупп с мультипликативно возмущёнными генераторами // Наука и образование. – 2011. – Т. 10. – с. 1-14.
- [9] Бутко Я.А. Формула Фейнмана-Каца-Ито для бесконечномерного уравнения Шрёдингера со скалярным и векторным потенциалами // Нелинейная динамика. – 2006. – т. 2:1. – С. 75-87.
- [10] Бутко Я.А.. Фейнмановские формулы для эволюционных уравнений// Наука и образование. – 2014. – Т. 3. – С. 95-132.

- [11] Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979. – 175 с.
- [12] Горяйнов В.В. Полугруппы аналитических функций в анализе и приложениях // УМН. – 2012. – Т. 67:6(408). – С. 5-52.
- [13] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983. 384 с.
- [14] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: URSS, 2004. – 392 с.
- [15] Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1992. – 352 С.
- [16] Лапшин В.А. Математические модели динамики срочной структуры процентных ставок, учитывающие качественные свойства рынка. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, факультет ВМК МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 2010. – 183 с.
- [17] Неклюдов А. Ю. Обращение теоремы Чернова// Матем. Заметки. – 2008. – Т. 83:4. – pp. 581-589.
- [18] Неклюдов А.Ю.. Теоремы Чернова и Троттера-Като для локально-выпуклых пространств. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: МГУ, 2008. – 95 с.
- [19] Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Сер. матем. – 2016. – Т. 80:6. – С. 141-172.
- [20] Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Скорость сходимости фейнмановских аппроксимаций полугрупп, порождаемых гамильтонианом осциллятора // ТМФ. – 2012. – Т. 172:1. – 122–137.
- [21] Сакбаев В.Ж. Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.. – 2019. – Т. 140. – 88–118.

- [22] Сакбаев В.Ж. Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов /// ТМФ. – 2017. – Т. 191:3. – С. 473-502.
- [23] Смолянов О.Г., Гоф (J Gough) Д.Г., Ратью (T Ratiu) Т. Теоремы Нетер и квантовые аномалии // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 472, № 3. — С. 1–5.
- [24] Смолянов О.Г., Трумен А. Формулы Фейнмана для решений уравнений Шредингера на компактных римановых многообразиях // Матем. заметки. – 2000. – Т. – 68:5. – С. 789–793.
- [25] Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н. Гамильтоновы формулы Фейнмана для уравнений, содержащих оператор Владамира с переменными коэффициентами // ДАН. – 2011. – т. 440:5. – с. 597-602.
- [26] Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н., Кпекпаси М. Формулы Фейнмана-Каца и Фейнмана для бесконечномерных уравнений с оператором Владамира // ДАН. – 2011. – т. 438:5. – с. 609-614.
- [27] Смолянов О. Г. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения: учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1979. – 86 с.
- [28] Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. Изд.2, перераб. и сущ. доп. М.: URSS. 2015. 336 с.
- [29] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Издательство иностранной литературы, 1962. — 830 с.
- [30] Шамаров Н.Н. Представления эволюционных полугрупп интегралами по траекториям в вещественных и р-адических пространствах. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. М.: МГУ, 2010. — 224 с.
- [31] Шварц Л. Анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1972. — 824 с.
- [32] Boettcher B., Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Feynman formulae and path integrals for some evolution semigroups related to tau-quantization.// Rus. J. Math. Phys.. – 2011. – Vol. 18:4. – pp. 381-399.

- [33] Botelho L.C.L. A method of integration for wave equation and some applications to wave physics // Random Oper. Stoch. Equ. – 2010. – Vol. 18. – pp. 301-325.
- [34] Botelho L.C.L. A note on Feynman-Kac path integral representations for scalar wave motions // Random Oper. Stoch. Equ. – 2013. – Vol. 21. – pp. 271–292.
- [35] Botelho L.C.L. Non linear Diffusion and Wave Dumped Propagation: Weak Solutions and Statistical Turbulence Behavior.// Journal of Advanced Mathematics and Applications. – 2014. – Vol. 3. – pp. 1-11.
- [36] Botelho L.C.L. Semi-linear Diffusion in R^D and Hilbert Spaces, a Feynman-Wiener path integral study // Random Oper. Stoch. Equ. – 2011. – Vol. 19:4. pp. 361–386.
- [37] Botelho Luiz C.L. Non-linear diffusion in R^D and Hilbert Spaces, a Cylindrical/Functional Integral Study// URL: <https://arxiv.org/abs/1003.0048>
- [38] Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Feynman formulae and phase space Feynman path integrals for tau-quantization of some Levy-Khintchine type Hamilton functions. // Journal of Mathematical Physics. – 2016. – Vol. 57. p. 023508
- [39] Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman formulas for second-order parabolic equations in bounded and unbounded domains // Infinite Dimansional Analyasis, Quantum Probability and Related Topics. – 2010. – Vol. 13:3. – pp. 377-392.
- [40] Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations // Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top. – 2012. – Vol. 15:3. – 26 p.
- [41] Butko Yana A. Chernoff approximation for semigroups generated by killed Feller processes and Feynman formulae for time-fractional Fokker-Planck-Kolmogorov equations// URL: <https://arxiv.org/abs/1708.02503>
- [42] Buzinov M.S. Feynman and Quasi-Feynman formulae for evolution equations with a polyharmonic Hamiltonian // Int. Conf. "Infinite-dimensional dynamics, dissipative systems, and attractors"(Nizhny Novgorod, Russia, July 13-17,

- 2015): Book of abstracts. – Nizhny Novgorod State University, 2015, pp. 23-24.
- [43] Chernoff Paul R. Note on product formulas for operator semigroups // J. Functional Analysis. – 1968. – Vol. 2:2. – pp. 238-242.
- [44] Da Prato G., Zabczyk J. Second Order Partial Differential Equations in Hilbert Spaces // London Mathematical Society Lecture Notes Series. – 2002. – vol. 293 – 379 pp.
- [45] Dubravina V.A. Feynman formulas for solutions of evolution equations on ramified surfaces // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2014. Vol. 21:2. – pp. 285-288.
- [46] Engel K.-J., Nagel R. A Short Course on Operator Semigroups. N.Y. Springer Science + Business Media, 2006. – 256 p.
- [47] Engel K.-J., Nagel R.. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Springer, 2000. – 603 p.
- [48] Fernique X. Intégrabilité des vecteurs gaussiens // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. – 1970. Vol. 270. – pp. A1698–A1699.
- [49] Jacob N. Pseudo Differential Operators and Markov Processes, volume 1: Fourier Analysis and Semigroups. London: Imperial College Press. 2001. 493 p.
- [50] Krylov N.V. Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Holder Spaces // AMS, Graduate Texts in Mathematics. – 1996. – Vol. 12. – 164 p.
- [51] Nelson E. Feynman Integrals and the Schroedinger Equation // J. Math. Phys. – 1964. Vol. 5:3. – pp. 332-343.
- [52] Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh., Smolyanov O.G. Feynman formulas as a method of averaging random Hamiltonians.//Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2014. – Vol. 285:1. – pp. 222-232.
- [53] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983. – 285 p.

- [54] Plyashechnik A.S. Feynman formula for Schrodinger-Type equations with time- and space-dependent coefficients // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2012. – Vol. 19:3. –pp. 340-359.
- [55] Plyashechnik A.S. Feynman formulas for second-order parabolic equations with variable coefficients // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2013. Vol. 20:3. – pp. 377-379.
- [56] R.P. Feynman. An operation calculus having applications in quantum electrodynamics // Phys. Rev. – 1951. – Vol. 84. – pp. 108-128.
- [57] R.P. Feynman. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys.. – 1948. – Vol. 20. – pp. 367-387.
- [58] Smolyanov O.G. Feynman formulae for evolutionary equations // Trends in Stochastic Analysis, London Mathematical Society Lecture Notes Series. — 2009. Vol. 353. – pp. 283-302.
- [59] Smolyanov O.G. Schrödinger type semigroups via Feynman formulae and all that // Proceedings of the Quantum Bio-Informatics V, Tokyo University of Science, Japan, 7 - 12 March 2011. World Scientific, 2013. – pp. 301-313.
- [60] Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Feynman Formulas and Path Integrals for Evolution Equations with the Vladimirov Operator // Proc. of the Steklov Math. Inst. – 2009. – T. 265:1. – C. 217-228.
- [61] Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula. — J. Math. Phys. 43, 10 (2002) 5161-5171.
- [62] Smolyanov O.G., Weizsäcker H.v., Wittich O. Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures // Doklady Math. – 2000. – Vol. 61. – pp. 230-234.
- [63] Smolyanov O.G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds // Potential Analysis. – 2007. – Vol. 26:1. – pp 1-29.
- [64] Smolyanov O.G., Weizsäcker H.v., Wittich O. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standard Brownian motions, in Stochastic

- Processes, Physics, and Geometry: New Interplays, CMS Conf. Proc., II, Leipzig, 1999 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000), Vol. 29, pp. 589–602.
- [65] Stone M.H.. On one-parameter unitary groups in Hilbert Space // Annals of Mathematics. – 1932. – vol. 33:3. Pp. 643-648.
- [66] Trotter H.F. On the product of semi-groups of operators // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1959. — Vol. 10:4. — pp. 545–551.
- [67] Zdun M.C. On a limit formula for embeddings of diffeomorphisms in regular iteration semigroups // Journal of Difference Equations and Applications. – 2013. – Vol. 19:6. – pp. 942-951.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

- [68] Remizov I.D. Solution of a Cauchy problem for a diffusion equation in a Hilbert space by a Feynman formula // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2012. – Vol.19:3. – pp. 360-372.
- [69] Remizov I.D. Solution to a parabolic differential equation in Hilbert space via Feynman formula I // Modeling and Analysis of Information Systems. – 2015. – Vol. 22:3. – pp. 337-355.
- [70] Remizov Ivan D. Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation // Journal of Functional Analysis. – 2016. – Vol. 270:12. – pp. 4540-4557.
- [71] Ремизов И.Д. Фейнмановские и квазифейнмановские формулы для эволюционных уравнений // Доклады Академии наук. – 2017. – Т. 476:1. – С. 17-21; Remizov I.D. Feynman and Quasi-Feynman Formulas for Evolution Equations // Doklady Mathematics. – 2017. – Vol. 96:2. – pp. 433-437.

- [72] Ремизов И.Д. Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений относительно функций бесконечномерного аргумента // Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2011». М.: МГУ, 2011. – 2 с.
- [73] Ремизов И.Д. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в гильбертовом пространстве с помощью формулы Фейнмана // Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012». М.: МГУ, 2012. – 2 с.
- [74] Ремизов И.Д. Решение задачи Коши для уравнения диффузии в гильбертовом пространстве с помощью формулы Фейнмана // Сборник тезисов докладов III международной конференции «Математическая физика и её приложения». Самара, Издательство самарского государственного технического университета, 2012. – С. 251-252.
- [75] Ремизов И.Д. Представление решения параболического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве в виде формулы Фейнмана // Сборник тезисов докладов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013». М.: МГУ, 2011. – 2 с.
- [76] Ремизов И.Д. Исчисление функций Чернова и задача Коши для эволюционных уравнений // Сборник тезисов докладов на XIV международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования (с. Цей, 3-8 июля 2017 г.)». Владикавказ, Изд-во владикавказского научного центра РАН, 2017. – С. 121-122.